科學前沿丛书

# 孤立子理论中的达布变换及其几何应用

（第二版）

谷超豪　胡和生　周子翔　著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

**图书在版编目(CIP)数据**

孤立子理论中的达布变换及其几何应用/谷超豪,胡和生,周子翔著. —2版. —上海:上海科学技术出版社,2005.6
(科学前沿丛书)
ISBN 7-5323-7866-7

Ⅰ.孤... Ⅱ.①谷...②胡...③周... Ⅲ.孤立子-积分变换 Ⅳ.①0177.6②0572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 134061 号

世纪出版集团
上海科学技术出版社 出版、发行
(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)
新华书店上海发行所经销
常熟市兴达印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 18 插页 4
字数 265 000
1999 年 11 月第 1 版
2005 年 6 月第 2 版
2005 年 6 月第 2 次印刷
印数 1 201-2 400
定价:53.00 元

---

# 出版说明

科学技术是第一生产力.21世纪,科学技术和生产力必将发生新的革命性突破.

为贯彻落实“科教兴国”和“科教兴市”战略,上海市科学技术委员会和上海市新闻出版局于2000年设立“上海科技专著出版资金”,资助优秀科技著作在上海出版.

本书出版受“上海科技专著出版资金”资助.

上海科技专著出版资金管理委员会

# 内 容 提 要

本书系统介绍了孤立子理论中的 Darboux 变换方法及其在微分几何中的应用,所介绍的内容大部分是三位作者近年来的研究成果.书中的第 1、2、3 章分别叙述了 1+1 维、1+2 维和高维 Darboux 变换的一般理论和许多具体的例子,第 4、5 两章叙述 Darboux 变换在微分几何中的曲面论和调和映照中的应用.本书的中心是对具有 Lax 对的非线性偏微分方程给出显式的(通常是纯代数的)、一般的求解方法.本书只假定读者具有大学数学系本科的分析、代数和几何的基础,为了读者阅读方便,第 4、5 章尽可能体现独立的叙述系统,使特别对几何有兴趣的读者也可以直接阅读其内容.本书可作为研究生的教材,也可供高等学校数学系和物理系研究生及有关的科研人员参考.

# 《科學前沿丛书》序

人类文明发展的长河正浩浩荡荡地流向又一个千年，在世界格局的综合国力竞争中，基础研究的发展水平已经成为一个民族的智慧、能力和国家科学技术进步的基本标志之一.

基础研究是人类对未知世界的探求，它在各门学科的前沿上展开，以认识客观世界的物质结构、各种基本运动形态和运动规律为已任，它的重大发现常常带来社会生产的革命性变化.

基础研究在科学前沿向未知领域迈进的每一步，都有赖于创新，创新是基础研究的灵魂，而创新需要很高水平的理论思维. 正如 19 世纪的一位伟人所说，一个民族想要站在科学的最高峰，就一刻也不能没有理论思维.

自然科学的理论来自关于自然现象和探索实践认识的总结. 这种总结通过去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的过程，实现关于自然规律认识的飞跃，在人类认识自然的知识体系上编织出新的结点. 这样的结点往往又是在新的高度编织下一个结点的支撑点. 一个民族想要攀登到科学的最高峰，进行高水平的理论思维，既需要一批批科学家不懈地在科学前沿上探索，也需要他们不断地进行这种实现认识上飞跃的总结.

著书立说，对一个专题或一个领域的研究成果，进行去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的总结，使之系统化、理论化，是提高理论思维水平和持续创新能力的必须. 在攀登科学高峰的历程中，一部好的基础科学学术著作常常能为众多继续向上攀登的人们提供一块坚实的平台. 因

此,出版好基础性研究领域的学术著作,是一件十分有意义的工作.

《科学》杂志的编者和出版者,自 1915 年《科学》创刊以来,始终以传播科学为己任,在办好刊物的同时,积极地参与出版科学著作这件有意义的工作.在 20 世纪的最后五年,《科学》的出版者——上海科学技术出版社推出了一套《科学专著丛书》,出版了 14 部专著,受到了科学界和出版界的欢迎和好评.

我高兴地看到,在迎来 21 世纪之时,作为上述努力的继续,该社又推出这套《科学前沿丛书》,着重于从基础性研究的前沿交叉领域选题,出版学术著作.我期望,这套丛书的编者、作者和出版者能通力合作,通过自己的辛勤劳动,以一部部精心选题、精心著述、精心编辑、精心出版的著作,参与铺筑通向中国科学再度辉煌的大道!

周光召

(《科学》杂志编委会主编)

2001 年元旦

# 本 书 序

孤立子理论是非线性科学的一个重要方向,它既反映一类非常稳定的自然现象,例如江河中的某一类水波、光纤中的光信号传播等等,体现了一大类非线性相互作用的若干特征,并为许多应用问题(如光孤子通讯)提供了启示.另一方面,这一理论又为非线性偏微分方程提供了求显式解的方法,因而受到物理学界和数学界的充分重视.

非线性偏微分方程的求解是各门科学中都会遇到的问题,难度很大,一般说来,只有在非常特殊的情况下,才可能求得有显式表达式的准确解.但出人意料,对于许多孤立子方程,已有多种显式求解的方法,其中最常见的有反散射方法和 Bäcklund 变换等.前者利用非线性偏微分方程的 Lax 对和常微分方程的谱理论,把 Cauchy 问题化为求解线性积分方程,在退化核的情况下,能给出显式的解.后者是以已知解为种子,导出一个完全可积的偏微分方程组,从而给出一个新解.在具体实施中,还可利用多个有一定关系的已知解给出一个新解的显式表达式,称为"非线性迭加公式".

但是,当积分方程的核非退化时,解的显式表达式是很难得出的,非线性迭加公式也只是在相当特殊情形才能出现.到 70 年代后期,人们又注意到,Darboux(达布)在一个世纪以前所提供的处理二阶常微分方程谱问题的一个方法对于非线性偏微分方程的显式求解有很重要的作用,从而该方法在孤立子和可积系统理论的研究中,越来越为人们所注意,并得到迅速发展,这便是 Darboux 变换法.关于 Darboux 变换的前期工作,可见文献[57].

本书的目的是想进一步阐述 Darboux 变换,并介绍其几何应用.主要内容有:

一、将 Darboux 变换用矩阵形式表述，从而可以说明 Darboux 变换实质上就是带谱参数的规范变换，并且给予 Bäcklund 变换以显式的形式.

二、用普适的、纯代数的算法构作 Darboux 阵.

三、把 Darboux 变换推广到 2 个和多个空间变量的情形，构作了具有弹性散射性质的高维时空的孤立子，包括完全局域化的孤立子. 对 2 个空间变量的情况，还构作了微分算子形式的 Darboux 算子，对高维时空的情况，提出了广义的自对偶杨-Mills 流这一更为广泛的可积系统.

四、把 Darboux 变换应用于一系列的几何问题，得到显式的和普适的解法，阐明了 Lax 对的几何意义. Lax 对不仅是求解微分方程的辅助工具，而且是所要寻求的几何对象. 我们所叙述的几何问题包括：欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 和 Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 的各种类型的 Bäcklund 线汇、常曲率曲面和常平均曲率曲面的构作、射影空间 $P^3$ 中的苏链、$\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^{1,1}$ 到各种类型的"球面"和群 $U(N)$ 的调和映照以及酉子解的纯代数算法构作等.

本书的第 1、2、3 章叙述 Darboux 变换的一般理论和某些有代表性的具体的例子，第 4、5 章叙述 Darboux 变换对曲面论及调和映照的应用. 本书只假定读者具有大学数学系本科的数学分析、代数和几何的基础知识，为了读者阅读方便，我们使第 4、5 章尽可能体现独立的叙述系统，使特别对几何有兴趣的读者也可以直接阅读其内容.

本书的主体内容由作者在这一领域中一系列的研究成果所构成，这些研究工作得到了国家攀登计划项目"非线性科学"、国家基础研究 973 项目"非线性科学"、国家自然科学基金会重点项目"整体微分几何和物理应用"、国家自然科学基金会青年基金、教育部博士点基金、跨世纪优秀人才基金、上海市科委、教委科研基金的支持，是在教育部复旦大学非线性数学模型和方法开放实验室、复旦大学数学研究所中完成的.

作者感谢上海科学技术出版社为出版本书所作的努力.

**作　者**

1998 年 7 月于复旦大学

# 再版小记

本版对初版的内容作了若干修订，主要是对 Minkowski 空间补充了类时的伪球线汇和类时正常曲率空间的主曲率为虚的情形，又对西子解的 Darboux 变换性质作了较为仔细的说明，改正了一些疏漏之处.

作　者

2004 年 4 月于复旦大学

# 目　录

# 第 1 章　1+1 维可积系统

本章从最原始的 Darboux(达布)变换开始,叙述 KdV 方程、MKdV 方程的 Darboux 变换的经典形式,然后就转向于 AKNS 系统(及其扩充)的 Darboux 变换,它的作法具有很高的普适性. 同一般文献中所讨论的不一样,这里所讨论的可以是系数和 $t$ 有关的偏微分方程. 我们所介绍的 Darboux 阵可用纯代数的算法构作而成,并且对这种系统中的任何方程都是统一的. 本章中还讨论化约系统的 Darboux 变换以及 Darboux 变换与反散射方法的关系等,说明在未知函数的反散射数据表示下,Darboux 变换实际上是添加或减少一个解中所含的孤立子(离散谱).

## §1.1　KdV 方程、MKdV 方程及其 Darboux 变换

### 1.1.1　原始的 Darboux 变换

1882 年,G. Darboux[13] 研究了一个二阶线性常微分方程(现在称之为一维 Schrödinger 方程)的特征值问题*)

$$-\phi_{xx}-u(x)\phi=\lambda\phi, \tag{1.1}$$

式中 $u(x)$是给定的函数,称为**势函数**,$\lambda$ 是常数,称为**谱参数**. Darboux 发现了下面的事实:设 $u(x)$和 $\phi(x,\lambda)$是满足(1.1)式的两个函数,对任意给定的常数 $\lambda_0$,令 $f(x)=\phi(x,\lambda_0)$, 即 $f$ 是(1.1)式当 $\lambda=\lambda_0$ 时的一个解,则由

---

*) 在本书中常用关于 $x$, $t$ 等的下标来记偏导数,并假设一切遇到的函数在其定义域内均为连续的,而且可微分到所需要的阶次.

$$u' = u + 2(\ln f)_{xx},$$
$$\phi'(x, \lambda) = \phi_x(x, \lambda) - \frac{f_x}{f}\phi(x, \lambda) \tag{1.2}$$

所定义的函数 $u'$, $\phi'$ 一定满足和(1.1) 式同样形式的方程

$$-\phi'_{xx} - u'\phi' = \lambda\phi'. \tag{1.3}$$

这样,这个借助于特解 $f(x) = \phi(x, \lambda_0)$ 所作的变换(1.2)式将满足(1.1)式的一组函数$(u, \phi)$变化为满足同一方程的另一组函数$(u', \phi')$,这就是最原始的 Darboux 变换

$$(u, \phi) \longrightarrow (u', \phi'), \tag{1.4}$$

在 $f \neq 0$ 处它是有效的.

### 1.1.2 KdV 方程的 Darboux 变换

1885 年,荷兰的应用数学家 Korteweg 和 de Vries 导出了一个水波运动的非线性偏微分方程,现称为 Korteweg-de Vries 方程(KdV 方程). 20 世纪 60 年代中,人们[66]发现 KdV 方程与上述 Schrödinger 方程有着密切的联系. 具体说来,KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

是关于 $\phi$ 的线性方程组

$$\begin{cases} -\phi_{xx} - u\phi = \lambda\phi \\ \phi_t = -4\phi_{xxx} - 6u\phi_x - 3u_x\phi \end{cases} \tag{1.6}$$

(称为 KdV 方程的 Lax 对)的可积条件,这时 $u$ 和 $\phi$ 都应看成 $x$ 和 $t$ 的函数,这里可积条件的意义是:由(1.6)式的第一式得出 $\phi_{xx} = (-\lambda - u)\phi$,然后计算$(\phi_{xx})_t$,又由(1.6)式的第二式中计算$(\phi_t)_{xx}$,两者相等(对任何$\lambda$)的充要条件是 $u$ 满足 KdV 方程(1.5)式.

进一步的研究[77]发现 Darboux 变换(1.2)式也适用于 KdV 方程,这个变换中的函数$(u, \phi)$还依赖于 $t$,且满足(1.6)式,这个变换不但保持(1.6)式中第一式的形式不变,即

$$-\phi'_{xx} - u'\phi' = \lambda\phi' \tag{1.7}$$

成立,而且$(u', \phi')$还满足(1.6)式的第二式,因而$u'$满足(1.6)式的可积条件,即$u'$也是 KdV 方程的解. 这样,如果已知 KdV 方程的一个解$u$,通过解线性方程组(1.6)式得到$\phi(x, t, \lambda)$. 取$\lambda$的一个值$\lambda_0$得到$f(x, t) = \phi(x, t, \lambda_0)$, $u' = u + 2(\ln f)_{xx}$就给出 KdV 方程的一个新的解,而(1.2)式给出的$\phi'$则为$u'$相应的 Lax 对的解. 这就为作 KdV 方程的新解提供了非常好的方法. 上述这些事项可以通过初等的运算进行验证. 在后文中,会有更一般的方法来得到很普遍的结果.

为了从 KdV 方程的一个已知解$u$得到它的新解$u'$,现在只需要解线性方程组(1.6)式得出$\phi$,然后通过显式运算(1.2)式就可以得到 KdV 方程的大量特解. 不但如此,这个变换还可以继续进行下去,因为$\phi'$也已经具备,这时就不再需要解线性方程组(1.6)式,而由显式的算法可得出$(u'', \phi'')$等等:

$$(u, \phi) \longrightarrow (u', \phi') \longrightarrow (u'', \phi'') \longrightarrow \cdots.$$

这样,就把 Schrödinger 方程的 Darboux 变换推广为 KdV 方程的 Darboux 变换. 应该指出,它的基本思路是:利用非线性方程的一个解及其 Lax 对的解,用代数算法及微分运算来得出非线性方程的新解和 Lax 对相应的解. 还应该指出,(1.2)式只在$f \neq 0$时有效,如遇到$f = 0$, Darboux 变换会产生奇性.

**注 1.1**　如令$\psi_1 = \phi$, $\psi_2 = \phi_x$, $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$,那么 Lax 对(1.6)式可写成矩阵形式

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda - u & 0 \end{pmatrix} \Psi, \\ \Psi_t &= \begin{pmatrix} u_x & 4\lambda - 2u \\ -4\lambda^2 - 2\lambda u + u_{xx} + 2u^2 & -u_x \end{pmatrix} \Psi. \end{aligned} \tag{1.8}$$

也可以把(1.2)式改写成关于$\Psi$的变换式. 在后文中会进一步讨论这种矩阵形式的 Darboux 变换.

### 1.1.3　MKdV 方程的 Darboux 变换

Darboux 变换方法可推广到其他许许多多的方程,如 MKdV 方程、

sine-Gordon 方程等[76]. 下面先以 MKdV 方程为例讨论此问题,在以后各节中再讨论更一般的问题.

MKdV 方程

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.9}$$

是超定线性方程组

$$\begin{cases} \Phi_x = U\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ -u & -\lambda \end{pmatrix}\Phi \\ \Phi_t = V\Phi \\ \quad = \begin{pmatrix} -4\lambda^3 - 2u^2\lambda & -4u\lambda^2 - 2u_x\lambda - 2u^3 - u_{xx} \\ 4u\lambda^2 - 2u_x\lambda + 2u^3 + u_{xx} & 4\lambda^3 + 2u^2\lambda \end{pmatrix}\Phi \end{cases} \tag{1.10}$$

的可积条件[1, 85],即(1.9)式为使得 $\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$ 成为恒等式的充要条件. 方程组(1.10)式称为(1.9)式的 Lax 对,$\lambda$ 称为**谱参数**,$\Phi$ 表示一个二元的列向量或 $2\times 2$ 阵.

MKdV 方程的 Darboux 变换可以有多种导出的方法,现在指出其中的一种,主要是把 Schrödinger 方程(1.1)式适当地“复化”而导出 MKdV 方程的 Darboux 变换.

记(1.10)式的列向量解 $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, 则(1.10)式的第一式即

$$\begin{aligned} \phi_{1,x} &= \lambda\phi_1 + u\phi_2, \\ \phi_{2,x} &= -u\phi_1 - \lambda\phi_2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

令 $\psi = \phi_1 + \mathrm{i}\,\phi_2$, 并设 $\lambda$ 为实参数,$u$ 为实值函数,那么 $\psi$ 满足

$$\psi_{xx} = \lambda^2\psi - (\mathrm{i}\,u_x + u^2)\psi, \tag{1.12}$$

这是一个复的 Schrödinger 方程,势函数为 $(\mathrm{i}\,u_x + u^2)$. 可以直接验证,如果 $u$ 是 MKdV 方程的一个解,那么

$$w = \mathrm{i}\,u_x + u^2$$

是 KdV 方程

$$w_t + 6ww_x + w_{xxx} = 0$$

的一个复值解. 从 MKdV 方程的解 $u$ 到 KdV 方程的解 $w$ 的变换称为 Miura 变换.

**注 1.2**　如果令 $v = \mathrm{i}\,u$，(1.9)式就写成形式

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \tag{1.9$'$}$$

这时 Miura 变换就成为

$$w = v_x - v^2.$$

如果 $v$ 是(1.9′)式的实值解，那么 $w$ 是 KdV 方程的实值解.

取实数 $\lambda_0$ 及(1.12)式当 $\lambda = \lambda_0$ 时的解 $f = f_1 + \mathrm{i}\,f_2$，这时 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ 是(1.11)式当 $\lambda = \lambda_0$ 时的解，从 KdV 方程的结果知道，作如下的 Darboux 变换：

$$\psi' = \psi_x - (f_x/f)\psi, \quad w' = w + 2(\ln f)_{xx}, \tag{1.13}$$

那么 $\psi'$ 和 $w'$ 满足(1.12)式，$w'$ 满足 KdV 方程，并且可以证明，存在相应的 $u'$ 满足 MKdV 方程. 现在要把 $u'$ 的表达式显式地导出来.

利用(1.11)式，用分量写出来，(1.13)式的第一式就是

$$\phi'_1 + \mathrm{i}\,\phi'_2 = \lambda\phi_1 - \mathrm{i}\,\lambda\phi_2 - \lambda_0 \frac{\bar{f}}{f}(\phi_1 + \mathrm{i}\,\phi_2). \tag{1.14}$$

如果取 $\lambda$，$\lambda_0$ 为实数，那么 $\phi_1$，$\phi_2$ 也可取为实函数，从而(1.14)式就可写为

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_0 \dfrac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2 + f_2^2} & -\lambda_0 \dfrac{2f_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2} \\ \lambda_0 \dfrac{2f_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2} & -\lambda - \lambda_0 \dfrac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2 + f_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

通过计算可知 $\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix}$ 满足形状为

$$\begin{cases} \phi'_{1,x} = \lambda\phi'_1 + u'\phi'_2 \\ \phi'_{2,x} = -u'\phi'_1 - \lambda\phi'_2 \end{cases} \tag{1.16}$$

的线性方程组，这里

$$u' = -u - \frac{4\lambda_0 f_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2}. \tag{1.17}$$

根据(1.16)式的可积条件,$u'$是 MKdV 方程的解.

MKdV 方程的两个解 $u$ 和 $u'$之间的上述变换现在也称为 Darboux 变换.

### 1.1.4 Darboux 阵

为了将此方法推广到其他大量的非线性偏微分方程的求解,我们将上述关于 Darboux 变换的结果以略为不同的形式重新叙述如下.

对给定的 MKdV 方程的解 $u$,假设已知道(1.10)式的基本解(即由两个线性独立的列向量解所构成的矩阵,或者说,是(1.10)式的非退化矩阵解)

$$\Phi(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(x,t,\lambda) & \Phi_{12}(x,t,\lambda)\\ \Phi_{21}(x,t,\lambda) & \Phi_{22}(x,t,\lambda)\end{pmatrix},\tag{1.18}$$

任取实数 $\lambda_1$, $\mu_1$,记

$$\sigma=\frac{\Phi_{22}(x,t,\lambda_1)+\mu_1\Phi_{21}(x,t,\lambda_1)}{\Phi_{12}(x,t,\lambda_1)+\mu_1\Phi_{11}(x,t,\lambda_1)}\tag{1.19}$$

为 Lax 对(1.10)式的一个解的两个分量之比(即前面的 $f_2/f_1$),那么可以构造矩阵

$$D(x,t,\lambda)=\lambda I-\frac{\lambda_1}{1+\sigma^2}\begin{pmatrix}1-\sigma^2 & 2\sigma\\ 2\sigma & \sigma^2-1\end{pmatrix}.\tag{1.20}$$

令 $\Phi'(x,t,\lambda)=D(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda)$, 可以验证 $\Phi'(x,t,\lambda)$ 满足

$$\Phi'_x=U'\Phi',\quad \Phi'_t=V'\Phi',\tag{1.21}$$

其中

$$U'=\begin{pmatrix}\lambda & u'\\ -u' & -\lambda\end{pmatrix},$$

$$V'=\begin{pmatrix}-4\lambda^3-2u'^2\lambda & -4u'\lambda^2-2u'_x\lambda-2u'^3-u'_{xx}\\ 4u'\lambda^2-2u'_x\lambda+2u'^3+u'_{xx} & 4\lambda^3+2u'^2\lambda\end{pmatrix},\tag{1.22}$$

$$u'=u+\frac{4\lambda_1\sigma}{1+\sigma^2}.\tag{1.23}$$

(1.21)式、(1.22)式和(1.10)式完全类似,只是(1.10)式中的 $u$ 被换作 $u'$. 因为对(1.10)式的任意解 $\Phi$, $D\Phi$ 是(1.21)式的解,从而(1.21)式

对任何初值($\Phi'$在某一点$(x_0, t_0)$的值)都是可解的. 方程组(1.21)式是完全可积的,故其可积条件成立,即$u'$也是 MKdV 方程的解. 这样,用此方法就可从 MKdV 方程的一个解得到它的一个新解.

**注 1.3** (1.20)式给出的矩阵与(1.15)式中出现的矩阵差一个左乘因子$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. 注意到如果$(u, \phi_1, \phi_2)$满足(1.11)式,则$(-u, \phi_1, -\phi_2)$也满足(1.11)式. 因此由(1.20)式所导出的新解(1.23)式与(1.17)式差一符号. 它们都满足 MKdV 方程. 这时可以采用任一形式作解的变换,这种变换都称为 Darboux 变换.

矩阵 $D$ 有特别重要的意义,它称为 Darboux 阵.

可以概括地说,对给定的 MKdV 方程的解 $u$ 及其相应的 Lax 对的基本解 $\Phi$,取 $\lambda_1$, $\mu_1$ 为任意两个实常数,设 $\sigma$ 由(1.19)式所定义,则(1.23)式给出 MKdV 方程的一个新解 $u'$,并且 Darboux 阵 $D$ 给出 $u'$相应的 Lax 对的解 $\Phi' = D\Phi$, 而变换 $(u, \Phi) \to (u', \Phi')$ 就是 MKdV 方程的 Darboux 变换. 同 KdV 方程一样,矩阵形式的 Darboux 变换可以用纯代数的算法逐次进行下去:

$$(u, \Phi) \longrightarrow (u', \Phi') \longrightarrow (u'', \Phi'') \longrightarrow \cdots.$$

### 1.1.5 举例,单孤立子解和双孤立子解

现在看最简单的例子:取 MKdV 方程的平凡解 $u = 0$ 作为出发点,它所相应的 Lax 对(1.10)式的基本解可取为

$$\Phi(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix}\exp(\lambda x - 4\lambda^3 t) & 0\\ 0 & \exp(-\lambda x + 4\lambda^3 t)\end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

由(1.19)式,对常数 $\lambda_1 \neq 0$ 及 $\mu_1 = \exp(2\alpha_1) > 0$,有

$$\sigma = \exp(-2\lambda_1 x + 8\lambda_1^3 t - 2\alpha_1), \tag{1.25}$$

从而

$$D = \lambda I - \frac{\lambda_1}{\cosh v_1}\begin{pmatrix}\sinh v_1 & 1\\ 1 & -\sinh v_1\end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

其中

$$v_1 = 2\lambda_1 x - 8\lambda_1^3 t + 2\alpha_1.$$

(1.23) 式给出 MKdV 方程的单孤立子解

$$u' = 2\lambda_1 \operatorname{sech}(2\lambda_1 x - 8\lambda_1^3 t + 2\alpha_1), \tag{1.27}$$

相对于 $u'$ 的 Lax 对的解为

$$\begin{aligned}\Phi'(x, t, \lambda) &= (\Phi'_{ij}(x, t, \lambda)) \\ &= D(x, t, \lambda)\begin{pmatrix}\exp(\lambda x - 4\lambda^3 t) & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda x + 4\lambda^3 t)\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{1.28}$$

其中 $D$ 由(1.26)式给出.

(1.27)式之所以称为单孤立子解,是因为它具有下列性质:(i)它是个行波解,即具形式 $u' = f(x - ct)$; (ii)对任何 $t$, $\lim_{x\to\pm\infty} u' = 0$, 用比较直观的话来说,在一较小的范围之外 ($|2\lambda_1 x - 8\lambda_1^3 t + 2\alpha_1|$ 大于某一有限正数时),$u'$接近于 0.

如果将 $u'$作初始解,则可以利用 $\Phi'$ 作新的 Darboux 阵,以得到 MKdV 方程的一系列的新解.

为此,我们把一般情况下第二次 Darboux 变换有关的式子写出来. 设 $u$ 是 MKdV 方程(1.9)式的解,$\Phi$ 是它所相应的 Lax 对(1.10)式的基本解. 按(1.19)式、(1.20)式作出它的 Darboux 阵 $D = (D_{ij})$, 并记 $\sigma = \sigma_1$. 进一步,取常数 $\lambda_2 \neq 0(\lambda_2 \neq \lambda_1)$ 及 $\mu_2 = \exp(2\alpha_2)$, 按(1.19)式作

$$\sigma'_2 = \frac{\Phi'_{22}(x, t, \lambda_2) + \mu_2 \Phi'_{21}(x, t, \lambda_2)}{\Phi'_{12}(x, t, \lambda_2) + \mu_2 \Phi'_{11}(x, t, \lambda_2)}. \tag{1.29}$$

将 $\Phi' = D\Phi$ 代入,经计算得:

$$\begin{aligned}\sigma'_2 &= \left.\frac{D_{21}(\Phi_{12} + \mu_2\Phi_{11}) + D_{22}(\Phi_{22} + \mu_2\Phi_{21})}{D_{11}(\Phi_{12} + \mu_2\Phi_{11}) + D_{12}(\Phi_{22} + \mu_2\Phi_{21})}\right|_{\lambda=\lambda_2} \\ &= \frac{D_{21}(\lambda_2) + D_{22}(\lambda_2)\sigma_2}{D_{11}(\lambda_2) + D_{12}(\lambda_2)\sigma_2},\end{aligned} \tag{1.30}$$

其中

$$\sigma_2 = \frac{\Phi_{22}(x, t, \lambda_2) + \mu_2 \Phi_{21}(x, t, \lambda_2)}{\Phi_{12}(x, t, \lambda_2) + \mu_2 \Phi_{11}(x, t, \lambda_2)}. \tag{1.31}$$

现在仍以 $u = 0$ 作为出发点,则(1.27)式、(1.28)式就是前面已经构

作过的单孤立子解及其 Lax 对的基本解. 将 $D$ 的具体表达式代入(1.28)式,得到

$$\Phi'(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_1\tanh v_1)\mathrm{e}^{\lambda x-4\lambda^3t} & -\lambda_1\operatorname{sech} v_1\mathrm{e}^{-\lambda x+4\lambda^3t}\\ -\lambda_1\operatorname{sech} v_1\mathrm{e}^{\lambda x-4\lambda^3t} & (\lambda+\lambda_1\tanh v_1)\mathrm{e}^{-\lambda x+4\lambda^3t}\end{pmatrix},$$

从而得出

$$\sigma_2'=\frac{-\lambda_1\operatorname{sech} v_1+(\lambda_2+\lambda_1\tanh v_1)\exp(-v_2)}{(\lambda_2-\lambda_1\tanh v_1)-\lambda_1\operatorname{sech} v_1\exp(-v_2)},\tag{1.32}$$

其中

$$v_i=2\lambda_ix-8\lambda_i^3t+2\alpha_i\quad(i=1,\ 2).\tag{1.33}$$

根据(1.23)式可见,MKdV 方程的一个新解为

$$\begin{aligned}u''&=\frac{4\lambda_1\sigma_1}{1+\sigma_1^2}+\frac{4\lambda_2\sigma_2'}{1+\sigma_2'^2}\\&=\frac{2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda_2\cosh v_1-\lambda_1\cosh v_2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\cosh v_1\cosh v_2-2\lambda_1\lambda_2(1+\sinh v_1\sinh v_2)},\end{aligned}\tag{1.34}$$

式中 $\sigma_1$ 即为(1.25)式所确定的 $\sigma$. 这个解称为 MKdV 方程的**双孤立子解**,这个名称的来源可以由下面的分析得出. 我们要说明,当 $t\to\infty$ 时,双孤立子解渐近于两个单孤立子解.

现假设 $\lambda_2>\lambda_1>0$, 取 $M$ 是任一固定的正数,在 $t$ 无限增长,即 $|t|\sim\infty$ 时,令 $|x|\sim\infty$, 但保持 $|v_1|\leqslant M$. 由于

$$v_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_1-8\lambda_2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)t+2\alpha_2-\frac{2\lambda_2\alpha_1}{\lambda_1},\tag{1.35}$$

当 $t\sim-\infty$ 时,必有 $v_2\sim+\infty$,

$$u''\sim-2\lambda_1\operatorname{sech}(v_1-v_0),\tag{1.36}$$

其中

$$v_0=\tanh^{-1}\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2},\tag{1.37}$$

而当 $t\sim+\infty$ 时,必有 $v_2\sim-\infty$,

$$u''\sim-2\lambda_1\operatorname{sech}(v_1+v_0).\tag{1.38}$$

从而在固定 $v_1$ 时(即对以速度 $4\lambda_1^2$ 运动的观察者来说), $t\sim\pm\infty$ 时解分

别渐近于一个单孤立子解(相应于参数 $-\lambda_1$),只是当 $t\sim-\infty$ 与 $t\sim+\infty$ 时两个渐近单孤立子之间有一个相移,即孤立子的中心(峰值)从 $v_1=v_0$ 移到 $v_1=-v_0$.

类似地,如果限制 $|v_2|\leqslant M$, 由于

$$v_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}v_2+8\lambda_1(\lambda_2^2-\lambda_1^2)t+2\alpha_1-\frac{2\lambda_1\alpha_2}{\lambda_2}, \tag{1.39}$$

故有 $t\sim\pm\infty$ 时, $v_1\sim\pm\infty$,

$$\begin{aligned}u''&\sim 2\lambda_2\operatorname{sech}(v_2+v_0),\ t\sim-\infty,\\ u''&\sim 2\lambda_2\operatorname{sech}(v_2-v_0),\ t\sim+\infty.\end{aligned} \tag{1.40}$$

最后,当 $t\sim\pm\infty$, 而 $v_1$, $v_2$ 也都趋于±∞时(也就是观察者的速度 $\neq 4\lambda_1^2$、$4\lambda_2^2$ 时), $u''\sim 0$ 成立. 所以,综合上述讨论,无论 $t\sim+\infty$ 或 $t\sim-\infty$, $u''$ 均渐近于两个单孤立子解(见图 1.1~1.3).

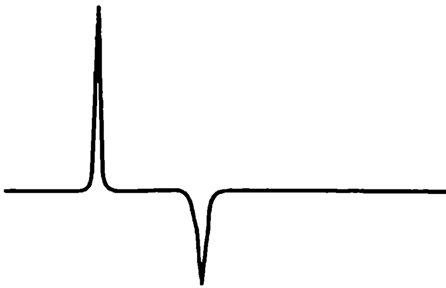


**图 1.1 MKdV 方程的双孤立子解, $t=-1$**

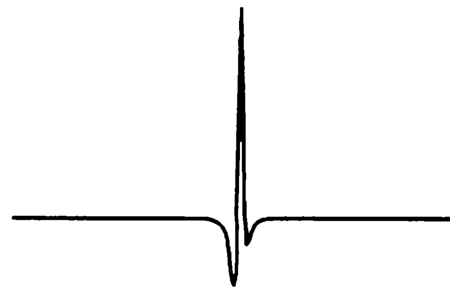


**图 1.2 MKdV 方程的双孤立子解, $t=0.1$**

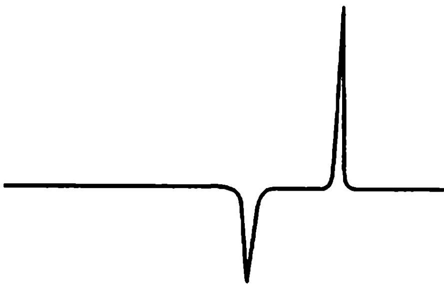


**图1.3 MKdV 方程的双孤立子解, $t=1$**

这个事实可以用下述方式说明:(i)一个双孤立子解在 $t\to\pm\infty$ 时,都渐近地分解为两个单孤立子解,或更进一步,(ii)如果两个单孤立子解($t\to-\infty$ 时的渐近形态)当 $t$ 增加时发生相互作用,相互作用后过了一段时间($t\to+\infty$),它们就基本恢复原状,而对于其渐近行为,也可以说其形状和传播速度都没有改变,但都有了一个"相移". 这就是说,波的中心从 $v_2=-v_0$ 移到 $v_2=+v_0$. 用物理学的话来说,这种现象叫弹性散射. 这是孤立子的最基本特性,正是这种特性的发现(首先是对 KdV 方程),大大地推动了孤立

子理论的形成和发展.

**注 1.4**　我们还应指出,从平凡解 $u=0$ 出发,用本节开始时所说的原始形式的 Darboux 变换(1.2)式也可以得出 KdV 方程的单孤立子解和多孤立子解. 此时计算更简单一些,我们留给读者来做.

上面讨论了 MKdV 方程的 Darboux 变换,并用它计算了单孤立子解和双孤立子解. 这些方法不但适用于作多孤立子解,而且可以更广泛地适用于大量的非线性方程. 下面就要讨论这些比较一般的问题. 为此,先说明如下事项.

**注 1.5**　方程组(1.8)式和方程组(1.10)式都具有形式

$$\Phi_x = U\Phi, \quad \Phi_t = V\Phi \tag{1.41}$$

($U$, $V$ 均为方阵且和 $\Phi$ 无关). 如果这种形式的方程完全可积,也就是其可积条件

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad ([U, V] = UV - VU) \tag{1.42}$$

恒成立,那么根据线性偏微分方程组的初等理论就可知道,对给定的初始条件 $t=t_0$, $x=x_0$, $\Phi=\Phi_0$, 这方程组的解存在且唯一. 这时 $U$ 和 $V$ 都是 $N\times N$ 方阵,在 $(t, x)$ 平面上无奇性,$\Phi$ 可以理解为 $N\times N$ 方阵,也可理解为 $N$ 元的列向量. (1.42)式有时也称为**零曲率条件**. 线性的完全可积方程组(1.41)式的求解可归结为线性常微分方程的求解. 当 $U$, $V$ 有孤立奇点时,$\Phi$ 一般只能在非奇点处有意义,而且可能为多值.

## §1.2　AKNS 系统

### 1.2.1　2 × 2 AKNS 系统

为了将 MKdV 方程的 Lax 对推广到更一般的情形,V. E. Zakharov、A. B. Shabat[85] 和 M. J. Ablowitz、D. J. Kaup、A. C. Newell、H. Segur[1] 引入了一种比较一般的 Lax 对,现在通常称之为 AKNS 系统. 为了简单起见,我们首先讨论 2 × 2 AKNS 系统(即具有 2 × 2 矩阵形式的 AKNS 系统),然后再讨论更一般的 $N\times N$ AKNS 系统.

2 × 2 AKNS 系统为线性微分方程组

$$\begin{cases}\Phi_x = U\Phi = \lambda J\Phi + P\Phi, \\ \Phi_t = V\Phi = \sum_{j=0}^{n} V_j\lambda^{n-j}\Phi,\end{cases} \tag{1.43}$$

这里

$$J = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}0 & p \\ q & 0\end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix}A & B \\ C & -A\end{pmatrix}, \tag{1.44}$$

而

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=0}^{n} a_j(x,\ t)\lambda^{n-j}, \\ B &= \sum_{j=0}^{n} b_j(x,\ t)\lambda^{n-j}, \\ C &= \sum_{j=0}^{n} c_j(x,\ t)\lambda^{n-j}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

其中 $p$, $q$, $a_j$, $b_j$, $c_j$ 是 $x$, $t$ 的复值或实值函数, $\lambda$ 是复参数,称为**谱参数**.

如注 1.5 所述,(1.43)式的可积条件是

$$U_t - V_x + [U,\ V] = 0, \tag{1.46}$$

对一切 $\lambda$ 成立. 将(1.46)式写成分量形式,即

$$\begin{aligned} A_x &= pC - qB, \\ B_x &= p_t + 2\lambda B - 2pA, \\ C_x &= q_t - 2\lambda C + 2qA. \end{aligned} \tag{1.47}$$

上式中等式两端都是 $\lambda$ 的多项式. 如果按 $\lambda$ 的幂次展开,则有

$$\begin{aligned} & b_0 = c_0 = 0, \\ & a_{j,x} = pc_j - qb_j \quad (0 \leqslant j \leqslant n), \\ & b_{j+1} = \frac{1}{2}b_{j,x} + pa_j \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1), \\ & c_{j+1} = -\frac{1}{2}c_{j,x} + qa_j \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1), \end{aligned} \tag{1.48}$$

及

$$\begin{aligned} p_t &= b_{n,x} + 2pa_n, \\ q_t &= c_{n,x} - 2qa_n. \end{aligned} \tag{1.49}$$

这时(1.48)式可以看成是 $A$, $B$, $C$ 的系数所应该满足的微分方程,而

(1.49)式是 $p$, $q$ 所满足的发展型方程.在(1.48)式中,$a_j$, $b_j$, $c_j$ 可以通过代数运算及求导、积分逐次得到,往下可看到,它们实际上是 $p$, $q$ 的微分多项式,即是 $p$, $q$ 及其关于 $x$ 的导数的多项式.这些多项式的系数由 $t$ 的一些任意函数所构成.从(1.48)式中解出 $a_j$, $b_j$, $c_j$ 后,(1.49)式就成为 $p$, $q$ 所满足的非线性发展方程.

对 $j=0, 1, 2, 3$, 有

$$\begin{aligned}
&a_0=\alpha_0(t), \quad b_0=c_0=0, \\
&a_1=\alpha_1(t), \quad b_1=\alpha_0(t)p, \quad c_1=\alpha_0(t)q, \\
&a_2=-\frac{1}{2}\alpha_0(t)pq+\alpha_2(t), \\
&b_2=\frac{1}{2}\alpha_0(t)p_x+\alpha_1(t)p, \\
&c_2=-\frac{1}{2}\alpha_0(t)q_x+\alpha_1(t)q, \\
&a_3=\frac{1}{4}\alpha_0(t)(pq_x-qp_x)-\frac{1}{2}\alpha_1(t)pq+\alpha_3(t), \\
&b_3=\frac{1}{4}\alpha_0(t)(p_{xx}-2p^2q)+\frac{1}{2}\alpha_1(t)p_x+\alpha_2(t)p, \\
&c_3=\frac{1}{4}\alpha_0(t)(q_{xx}-2pq^2)-\frac{1}{2}\alpha_1(t)q_x+\alpha_2(t)q.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

这里 $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$是 $t$ 的任意函数,它们是由(1.48)式的第二式为求 $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ 所作的积分而出现的积分常数.

下面是最常见、最重要的几个例子.

**例 1.1**　$n=3$, $p=u$, $q=-1$, $\alpha_0=-4$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, 这时,

$$a_3=-u_x, \quad b_3=-u_{xx}-2u^2, \quad c_3=2u,$$

(1.49)式化为 KdV 方程

$$u_t+u_{xxx}+6uu_x=0.$$

**例 1.2**　$n=3$, $p=u$, $q=-u$, $\alpha_0=-4$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, 这时,

$$a_3=0, \quad b_3=-u_{xx}-2u^3, \quad c_3=u_{xx}+2u^3,$$

则得到 MKdV 方程

$$u_t + u_{xxx} + 6u^2 u_x = 0.$$

**例 1.3** $n = 2$, $p = u$, $q = -\bar{u}$, $\alpha_0 = -2\mathrm{i}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$,

$$a_2 = -\mathrm{i}\,|\,u\,|^2,\quad b_2 = -\mathrm{i}u_x,\quad c_2 = -\mathrm{i}\,\bar{u}_x,$$

(1.49)式给出非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t = u_{xx} + 2\,|\,u\,|^2 u.$$

我们已经看到,对 $j = 0, 1, 2, 3$, $a_j$, $b_j$, $c_j$ 是 $p$, $q$ 及其关于 $x$ 的导数的多项式,它们的系数是 $t$ 的函数,也就是说,它们是 $p$, $q$ 的微分多项式,但系数可以是 $t$ 的函数. 下面要证明,这对于一般的 $j$ 也是成立的.

**引理 1.1** (1.48)式所给出的 $a_j$, $b_j$, $c_j$ 是 $p$, $q$ 的微分多项式.

**证明** 用数学归纳法证明:

对 $j = 0$, 结论显然成立.

假设当 $j < l$ 时 $a_j$, $b_j$, $c_j$ 是 $p$, $q$ 的微分多项式,现在要证明 $a_l$, $b_l$, $c_l$ 也是 $p$, $q$ 的微分多项式.

由(1.48)式得, $b_l$, $c_l$ 是 $p$, $q$ 的微分多项式,因此只需证明 $a_l$ 是 $p$, $q$ 的微分多项式就可以了. 而对 $1 \leqslant j \leqslant l-1$, 有

$$\begin{aligned}
& b_j c_{l+1-j} - c_j b_{l+1-j} \\
&= b_j\left(q a_{l-j} - \frac{1}{2} c_{l-j,x}\right) - c_j\left(p a_{l-j} + \frac{1}{2} b_{l-j,x}\right) \\
&= (q b_j - p c_j) a_{l-j} - \frac{1}{2}(b_j c_{l-j,x} + c_j b_{l-j,x}) \\
&= -\left(a_j a_{l-j} + \frac{1}{2} b_j c_{l-j} + \frac{1}{2} c_j b_{l-j}\right)_x + a_j a_{l-j,x} \\
&\quad + \frac{1}{2}(b_{j,x} c_{l-j} + c_{j,x} b_{l-j}) \\
&= -\left(a_j a_{l-j} + \frac{1}{2} b_j c_{l-j} + \frac{1}{2} c_j b_{l-j}\right)_x \\
&\quad + \left(p a_j + \frac{1}{2} b_{j,x}\right) c_{l-j} - \left(q a_j - \frac{1}{2} c_{j,x}\right) b_{l-j} \\
&= -\left(a_j a_{l-j} + \frac{1}{2} b_j c_{l-j} + \frac{1}{2} c_j b_{l-j}\right)_x \\
&\quad + b_{j+1} c_{l-j} - c_{j+1} b_{l-j}.
\end{aligned}$$

对 $j$ 从 1 到 $l-1$ 求和,得到

$$b_1c_l - c_1b_l = -\sum_{j=1}^{l-1}\left(a_ja_{l-j} + \frac{1}{2}b_jc_{l-j} + \frac{1}{2}c_jb_{l-j}\right)_x$$

$$-(b_1c_l - c_1b_l),$$

即

$$pc_l - qb_l = -\sum_{j=1}^{l-1}\frac{1}{4a_0}(2a_ja_{l-j} + b_jc_{l-j} + c_jb_{l-j})_x, \tag{1.51}$$

从而

$$a_l = -\sum_{j=1}^{l-1}\frac{1}{4a_0}(2a_ja_{l-j} + b_jc_{l-j} + c_jb_{l-j}) + \alpha_l(t) \tag{1.52}$$

是 $p$, $q$ 的微分多项式. 这就证明了引理. ∎

由于 $\{a_j, b_j, c_j\}$ 是 $p$, $q$ 的微分多项式,可以归纳定义 $\{a_j^0[p, q]\}$, $\{b_j^0[p, q]\}$, $\{c_j^0[p, q]\}$,使之满足递推关系(1.48)式及条件 $a_0^0[0, 0]=1$, $a_j^0[0, 0]=0(1\leqslant j\leqslant n)$. 显然,这些 $\{a_j^0, b_j^0, c_j^0\}$ 由 $p$, $q$ 及其关于 $x$ 的导数唯一确定. 从(1.48)式可以得到如下引理:

**引理 1.2**　对任意 $p$, $q$,有

$$\begin{aligned} &b_j^0[0, q]=0, \quad c_j^0[p, 0]=0, \\ &a_j^0[p, 0]=a_j^0[0, q]=0 \quad (1\leqslant j\leqslant n). \end{aligned} \tag{1.53}$$

而且对任何满足(1.48)式的 $\{a_j, b_j, c_j\}$,存在 $\alpha_j(t)(0\leqslant j\leqslant n)$, 使得

$$\begin{aligned} a_k[p, q] &= \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k-j}(t)a_j^0[p, q], \\ b_k[p, q] &= \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k-j}(t)b_j^0[p, q], \\ c_k[p, q] &= \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k-j}(t)c_j^0[p, q]. \end{aligned} \tag{1.54}$$

**注 1.6**　注意,(1.43)式的第一个方程($x$-方程)是完全确定的,而第二个方程却依赖于 $\alpha_0(t)$, $\cdots$, $\alpha_n(t)$(以及 $n$ 本身)的选取,发展型方程组(1.49)式也依赖于 $\alpha_0(t)$, $\cdots$, $\alpha_n(t)$(以及 $n$ 本身)的选取. 故在 AKNS 系统中(1.49)式是一系列的方程,称为*广义的 AKNS 梯队*. 如果 $\alpha_0(t)$, $\cdots$, $\alpha_n(t)$都是常数,则发展型方程的系数与 $t$ 无关,构成了一系列的无限维动

力系统，特别取 $\alpha_0=\cdots=\alpha_{n-1}=0$，$\alpha_n=1$，就得到标准化的 AKNS 梯队，记为

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}_t=K_n\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix},\tag{1.55}$$

式中 $K_n$ 是一个非线性微分算子，表达式为

$$K_n\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^0_{n,x}+2pa^0_n\\c^0_{n,x}-2qa^0_n\end{pmatrix}.\tag{1.56}$$

由作法及(1.48)式可知，从 $K_{n-1}$ 到 $K_n$ 是由递推算法生成的.

### 1.2.2 $N\times N$ AKNS 系统

到目前为止，我们介绍了 $2\times 2$ AKNS 系统. 为了解决更多的非线性偏微分方程的求解问题，很自然地要将 $2\times 2$ Lax 对推广到 $N\times N$ 矩阵的情形，即讨论形如

$$\begin{aligned}\Phi_x&=U\Phi=\lambda J\Phi+P(x,t)\Phi,\\ \Phi_t&=V\Phi=\sum_{j=0}^{n}V_j(x,t)\lambda^{n-j}\Phi\end{aligned}\tag{1.57}$$

的 Lax 对，其中 $J$ 是 $N\times N$ 常值对角矩阵，为叙述简洁计，设其对角元互不相等(否则，情况要复杂一些)，$P(x,t)$，$V_j(x,t)$都是 $N\times N$ 矩阵，且 $P(x,t)$的对角元全部为零，$\lambda$ 是谱参数.

(1.57)式的可积条件仍为

$$U_t-V_x+[U,V]=0.\tag{1.58}$$

利用(1.57)式中 $U$，$V$ 的表达式，可得到

$$P_t-\sum_{j=0}^{n}V_{j,x}\lambda^{n-j}+\sum_{j=-1}^{n-1}[J,V_{j+1}]\lambda^{n-j}+\sum_{j=0}^{n}[P,V_j]\lambda^{n-j}=0.\tag{1.59}$$

比较 $\lambda$ 的各个幂次的系数，就得到下列等式：

$$\begin{aligned}&[J,V_0]=0,\\&[J,V_{j+1}]-V_{j,x}+[P,V_j]=0\quad(0\leqslant j\leqslant n-1),\\&P_t-V_{n,x}+[P,V_n]=0.\end{aligned}\tag{1.60}$$

我们将一个矩阵 $M$ 分解为 $M = M^{\mathrm{diag}} + M^{\mathrm{off}}$，其中 $M^{\mathrm{diag}}$ 是 $M$ 的对角部分，而 $M^{\mathrm{off}} = M - M^{\mathrm{diag}}$，其对角元素均为 0. 由于 $J$ 是对角元互不相等的对角阵，而 $P$ 的对角元都是 0，(1.60)式给出

$$
\begin{aligned}
&V_0^{\mathrm{off}} = 0, \\
&V_{j,x}^{\mathrm{diag}} = [P, V_j^{\mathrm{off}}]^{\mathrm{diag}} \quad (0 \leqslant j \leqslant n), \qquad (1.61) \\
&[J, V_{j+1}^{\mathrm{off}}] = V_{j,x}^{\mathrm{off}} - [P, V_j]^{\mathrm{off}} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1),
\end{aligned}
$$

及

$$P_t = V_{n,x}^{\mathrm{off}} - [P, V_n]^{\mathrm{off}}. \qquad (1.62)$$

对给定的 $J$ 和 $P$，可通过求导和积分从(1.61)式中解出 $V_j (j = 0, \cdots, n)$. 事实上，同 $2 \times 2$ 情形一样，对于 $n = 0, 1, 2, 3$ 等等，可以通过积分逐次求出各个 $V_j$，至于一般的 $n$，可以用数学归纳法证明 $V_j$ 的各元素也是 $P$ 的各元素的微分多项式[80]. 于是(1.62)式给出关于 $P$ 的各个分量的一个偏微分方程组. 以后常用 $V_n[P]$ 来记(1.62)式中的 $V_n$，而 $V_n[P]$ 是 $P$ 的关于 $x$ 的微分多项式，其系数还可能和 $t$ 有关.

**例 1.4** 如果 $n = 1$, $J = A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_N)$, $V_0 = B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_N)$，且 $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j (i \neq j)$，取 $V_1 = Q(x, t)$ 的对角元都为 0，则由(1.61)式，有

$$Q_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j} P_{ij} \quad (i \neq j), \qquad (1.63)$$

而方程(1.62)式成为

$$P_t = Q_x - [P, Q]^{\mathrm{off}}, \qquad (1.64)$$

或写成分量形式为

$$P_{ij,t} = c_{ij} P_{ij,x} + \sum_{k \neq i, j} (c_{ik} - c_{kj}) P_{ik} P_{kj}, \qquad (1.65)$$

其中

$$c_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}. \qquad (1.66)$$

(1.65)式是关于 $P_{ij} (i \neq j)$ 的非线性偏微分方程组，称为 *N 波方程*，其主部具线性波的形式，实际上的波数为 $N(N-1)/2$.

与引理 1.2 的讨论类似，对于一个和 $x$ 无关的对角阵 $K$，我们记(1.61)

式满足 $V_0[0]=K$, $V_l[0]=0(1\leqslant l\leqslant n)$ 的解 $V_j$ 所构成的 $V$ 为

$$V_n^0[P,\ K]=\sum_{j=0}^{n}V_j\lambda^{n-j}.$$

**引理 1.2′**　(1.61)式的通解可表示为

$$V_k[P]=\sum_{j=0}^{k}V_{k-j}^0[P,\ \alpha_j],\tag{1.67}$$

这里 $\alpha_0$, …, $\alpha_n$ 为 $\{V_j[P]\}$ 所相应的"积分常数",它们是和 $x$ 无关的对角阵,但可以是 $t$ 的函数.

## §1.3　Darboux 变换

### 1.3.1　AKNS 系统的 Darboux 变换

考虑一个偏微分方程(组)

$$F(u,\ u_x,\ u_t,\ u_{xx},\ \cdots)=0,\tag{1.68}$$

其中 $u$ 可以是单一的函数或矩阵值的函数. 如果有 AKNS 形式的 Lax 对:

$$\begin{aligned}\Phi_x&=U\Phi=(\lambda J+P)\Phi,\\ \Phi_t&=V\Phi=\sum_{j=0}^{n}V_j\lambda^{n-j}\Phi,\end{aligned}\tag{1.69}$$

其中 $J$, $P$, $V_j$ 满足上一节的条件,当 $P$ 是 $u$ 的适当的微分多项式时,(1.68)式与(1.69)式的可积条件(1.58)式等价,那么就称(1.68)式具有 Lax 对(1.69)式. 这时(1.68)式就是发展型方程(1.62)式. 我们称(1.69)式的非异的 $N\times N$ 矩阵解 $\Phi$ 为**基本解**.

在本节中,假设 $P$ 的各个(非对角)元素是互相独立的,那么(1.68)式是关于 $P$ 的各个非对角元的一个微分方程组,即(1.62)式. 这时,称 AKNS 系统(1.69)式是**无约化的**,而(1.68)式就是(1.62)式. 下面讨论无约化 AKNS 系统的 Darboux 变换.

**定义 1.1**　设 $D(x,\ t,\ \lambda)$是一个 $N\times N$ 矩阵,如果对已给的 $P$ 和

(1.69)式的任意解 $\Phi$,使 $\Phi' = D\Phi$ 满足形状和(1.69)式相同的线性方程组

$$\begin{cases}\Phi'_x = U'\Phi' = (\lambda J + P')\Phi', \\ \Phi'_t = V'\Phi' = \sum_{j=0}^{n} V'_j \lambda^{n-j}\Phi', \end{cases} \tag{1.70}$$

其中 $P'$是对角元为 0 的适当的 $N\times N$ 矩阵函数,则称变换 $(P, \Phi) \to (P', \Phi')$ 为无约化 AKNS 系统的 Darboux 变换,$D(x, t, \lambda)$为 Darboux 阵.

注意,依据这个定义,$P'$所满足的方程应是

$$P'^{\text{off}}_t - V'^{\text{off}}_{n,x} + [P', V'_n]^{\text{off}} = 0, \tag{1.62'}$$

这里 $V'_n$ 是 $P'$的适当的微分多项式,事实上还会有 $V'_n = V_n[P']$ 成立,这在下一节将加以证明.

将 $\Phi' = D\Phi$ 代入上述方程组,可得 $U'$, $V'$的表达式

$$\begin{aligned} U' &= DUD^{-1} + D_x D^{-1}, \\ V' &= DVD^{-1} + D_t D^{-1}. \end{aligned} \tag{1.71}$$

**命题 1.1** 如果 $D$ 是(1.69)式的 Darboux 阵,$D'$是(1.70)式的 Darboux 阵,则 $D'D$ 也是(1.69)式的 Darboux 阵.

**证明** 因 $D'$是(1.70)式的 Darboux 阵,故存在 $U'' = \lambda J + P''$ ($P''$的对角元为 0), $V'' = \sum_{j=0}^{n} V''_j \lambda^{n-j}$, 使 $\Phi'' = D'\Phi' = D'D\Phi$ 满足

$$\begin{aligned} \Phi''_x &= U''\Phi'', \\ \Phi''_t &= V''\Phi'', \end{aligned} \tag{1.72}$$

从而由定义知 $D'D$ 是(1.69)式的 Darboux 阵. ∎

**注 1.7** 任何与 $\lambda$ 无关的常值对角阵 $K$ 均是 0 次 Darboux 阵,因为在它按(1.71)式的作用下,有

$$\lambda J + P \to \lambda J + KPK^{-1},$$

$$\sum_{j=0}^{n} V_j \lambda^{n-j} \to \sum_{j=0}^{n} KV_jK^{-1}\lambda^{n-j}.$$

但在不考虑 $P$ 中各元素的相互关系时,这种 Darboux 阵是平凡的,没有

什么作用.

下面首先关心的是关于 $\lambda$ 为一次的 Darboux 阵,不妨假定它具有形状 $\lambda I - S$, 这里 $S$ 是一个适当的 $N \times N$ 矩阵,$I$ 是单位阵. 由命题 1.1 及注 1.7,对任何形如 $K(\lambda I - S)$ ($K$ 是非退化常值阵)的 Darboux 阵的讨论均可转化为对形如 $\lambda I - S$ 的 Darboux 阵的讨论,因而构作 Darboux 阵就是要作出矩阵 $S$.

现在要导出 $S$ 所满足的微分方程. 由(1.70)式的第一个方程得:

$$\begin{aligned}&(\lambda J + P')(\lambda I - S)\Phi\\&= ((\lambda I - S)\Phi)_x\\&= (\lambda I - S)(\lambda J + P)\Phi - S_x\Phi.\end{aligned} \tag{1.73}$$

此式应对(1.69)式的任意解都成立,所以比较 $\lambda$ 的系数得

$$P' = P + [J, S], \tag{1.74}$$

这就是 $P'$的表达式.

(1.73)式中与 $\lambda$ 无关的项给出

$$S_x = P'S - SP = PS - SP + JS^2 - SJS,$$

即

$$S_x + [S, JS + P] = 0. \tag{1.75}$$

这是 $S$ 所满足的一个微分方程.

由(1.70)式的第二个方程,有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} V'_j\lambda^{n-j}(\lambda I - S)\Phi &= ((\lambda I - S)\Phi)_t\\&=(\lambda I - S)\sum_{j=0}^{n} V_j\lambda^{n-j}\Phi - S_t\Phi.\end{aligned} \tag{1.76}$$

比较 $\lambda^{n+1}, \lambda^n, \cdots, \lambda$ 的系数,可以递推地决定$\{V'_j\}$如下:

$$\begin{aligned}V'_0 &= V_0,\\V'_{j+1} &= V_{j+1} + V'_jS - SV_j,\end{aligned} \tag{1.77}$$

同时还得出 $S$ 满足的第二个方程

$$S_t = V'_nS - SV_n. \tag{1.78}$$

从(1.77)式解得

$$V_0' = V_0,$$
$$V_j' = V_j + \sum_{k=1}^{j}[V_{j-k}, S]S^{k-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{1.79}$$

(1.78)式成为

$$S_t + \left[S, \sum_{j=0}^{n} V_j S^{n-j}\right] = 0. \tag{1.80}$$

由此有下列定理:

**定理 1.1**　$\lambda I - S$ 是(1.69)式的 Darboux 阵,当且仅当 $S$ 满足

$$S_x + [S, JS + P] = 0,$$
$$S_t + \left[S, \sum_{j=0}^{n} V_j S^{n-j}\right] = 0, \tag{1.81}$$

并且在 $\lambda I - S$ 作为 Darboux 阵的变换下, $P' = P + [J, S]$.

**证明**　如果 $\lambda I - S$ 是 Darboux 阵,(1.81)式就是上面已得到的(1.75)式及(1.80)式. 反之,如果(1.75)式及(1.80)式成立,则对(1.69)式的任何解 $\Phi$,有(1.73)式和(1.76)式成立,从而由(1.74)式决定的 $P'$ 及由(1.77)式决定的 $\{V_j'\}$ 使(1.70)式成立,因而满足 Darboux 阵的定义. 证毕. ∎

由此可见,为找出 Darboux 阵,我们需要求出非线性偏微分方程组(1.81)式的解 $S$. 下面的定理给出了一次 Darboux 阵的构作方法.

设 $P$ 是(1.62)式的解. 取不完全相等的复数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$, 记 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$, 令 $h_i$ 为(1.69)式当 $\lambda = \lambda_i$ 时的列向量解, $H = (h_1, \cdots, h_N)$. 当 $\det H \neq 0$ 时,令

$$S = H\Lambda H^{-1}, \quad \lambda I - S = \lambda I - H\Lambda H^{-1}, \tag{1.82}$$

则有如下定理:

**定理 1.2**　由(1.82)式定义的 $\lambda I - S$ 是(1.69)式的 Darboux 阵.

**证明**　$h_i$ 是(1.69)式当 $\lambda = \lambda_i$ 时的解,即它满足

$$h_{i,x} = \lambda_i J h_i + P h_i,$$
$$h_{i,t} = \sum_{j=0}^{n} V_j \lambda^{n-j} h_i. \tag{1.83}$$

对 $H=(h_1, h_2, \cdots, h_N)$分别关于 $x$ 和 $t$ 求导,利用(1.83)式可得到

$$
\begin{aligned}
H_x &= JH\Lambda + PH, \\
H_t &= \sum_{j=0}^{n} V_j H \Lambda^{n-j},
\end{aligned}
\tag{1.84}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
S_x &= H_x \Lambda H^{-1} - H\Lambda H^{-1} H_x H^{-1} \\
&= [H_x H^{-1}, S] = [JS + P, S] \\
S_t &= H_t \Lambda H^{-1} - H\Lambda H^{-1} H_t H^{-1} \\
&= [H_t H^{-1}, S] = \Big[\sum_{j=0}^{n} V_j S^{n-j}, S\Big].
\end{aligned}
$$

这说明了由(1.82)式所定义的阵 $S$ 是(1.81)式的解. 由定理 1.1 知, $\lambda I - S$ 是(1.69)式的一个 Darboux 阵. 证毕. ■

**定理 1.3** 方程组(1.81)式关于 $S$ 是完全可积的,即对给定的 $S_0$, (1.81)式存在满足条件 $S(x_0, t_0) = S_0$ 在$(x_0, t_0)$一邻域上的解.

**证明** 当 $S_0$ 的 Jordan 形式为对角阵时,设其特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$, 相应的特征向量为 $h_{0i}$. 以 $h_{0i}$为初值,解(1.83)式得到 $h_i$,在$(x_0, t_0)$的一个邻域中,这些 $h_i$ 之间是线性无关的. 由 $h_i$, $\lambda_i$ 及(1.82)式可见 Darboux 阵存在,即(1.81)式的解存在. 若 $S_0$ 的 Jordan 形式不是对角阵,则存在序列$\{S_0^{(k)}\}$,使 $S_0^{(k)}$ 的 Jordan 形式为对角阵. 又当 $k \to \infty$ 时, $S_0^{(k)} \to S_0$, 对 $S_0^{(k)}$ 由(1.82)式作相应的阵 $S^{(k)}$, $S^{(k)}$必满足方程组(1.81)式,由方程组(1.81)式的解对初始条件的光滑依赖性,在$(x_0, t_0)$的一个邻域中 $S^{(k)}$ 收敛于 $S$, $S_x^{(k)}$ 收敛,$S_t^{(k)}$ 也收敛,且具有一致性,所以 $S$ 是(1.81)式的以 $S_0$ 为初始条件的解,即(1.81)式对任何初始条件都有解,从而是完全可积的. 证毕. ■

当然,也可以用直接计算可积条件的方法来证明定理 1.3,但计算比较冗长.

**注 1.8** $h_i$ 可以表示为 $h_i = \Phi(\lambda_i) l_i (i = 1, 2, \cdots, N)$, 其中 $l_1$, $l_2$, $\cdots$, $l_N$ 为 $N$ 个线性无关的 $N$ 元常值列向量,所以(1.82)式中的 $H$ 可有表达式

$$H = (\Phi(\lambda_1) l_1, \Phi(\lambda_2) l_2, \cdots, \Phi(\lambda_N) l_N).$$

一次 Darboux 阵的这种构造方法可参见文献[25]、[71]. 由定理 1.2 及 1.3 可见,(1.82)式给出一切与对角阵相似的矩阵 $S$,它能使 $\lambda I - S$ 是一阶 Darboux 阵. 我们称(1.82)式所表示的 Darboux 阵为可对角化的 Darboux 阵. 在实际制作解时,它特别有用,因为它有用代数算法组成的显式表达式,并且它们也构成了所有一阶 Darboux 阵的主体.

如果取初始解 $P = 0$, 就可以得到"单孤立子解",具体构造如下:

对 $P = 0$, (1.57)式的通解为 $\Phi_0 = e^{\lambda Jx + \Omega(\lambda,\, t)}$,其中

$$\Omega(\lambda,\, t) = \int \sum_{j=0}^{n} V_j[0](t)\lambda^{n-j}\,\mathrm{d}\,t$$

是一个对角矩阵. 任取常数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 及列向量 $l_1, \cdots, l_N$,令

$$H = (e^{\lambda_1 Jx + \Omega(\lambda_1,\, t)} l_1,\ \cdots,\ e^{\lambda_N Jx + \Omega(\lambda_N,\, t)} l_N),$$

则

$$P' = [J,\ H\Lambda H^{-1}]$$

就给出(1.62)式的解,且它相应的 Lax 对的基本解即(1.70)式的解为 $\Phi' = (\lambda I - H\Lambda H^{-1})\Phi$.

**注 1.9**　如果 $V_j[0]$不依赖于 $t$,那么 $\Omega(\lambda_i,\, t)$是 $t$ 的线性函数,孤立子是常速的,否则,我们就得到变速的孤立子[35].

如果用 $P'$作为初始解,再作 Darboux 变换,就得到"双孤立子解",在求"双孤立子解"的过程中,因为通解 $\Phi'$已知,$P''$, $\Phi''$是用纯代数方法得到的,故不再需要解微分方程. 用同样的方法依次类推,可得到任意的"多孤立子解". 从下一节的讨论可见,这些孤立子都满足同一方程组.

对于一般的 AKNS 系统,由于 $\det H \neq 0$ 不一定在 $\mathbf{R}^{1,1}$上处处成立,所以 Darboux 变换未必能给出在 $\mathbf{R}^{1,1}$上处处正则的解.

### 1.3.2 Darboux 变换保持方程不变

我们已经知道,$(P',\ V'_j)$满足相同的递推关系及形式相同的发展方程,这就是说,$(P,\ V_j)$满足(1.61)式和(1.62)式,而$(P',\ V'_j)$也满足相同的两套方程,因而$V'_j$也可表为 $P'$的微分多项式,其表示式在形式上与(1.67)式相同,即

$$V'_k[P'] = \sum_{j=0}^{k} V'^{0}_{k-j}[P',\ \alpha'_j(t)].$$

本节中要证明:$V'_k[P']$的表达式不仅在形式上与(1.67)式相同,而且其系数$\alpha'_0(t)$, …, $\alpha'_n(t)$也与$\alpha_0(t)$, …, $\alpha_n(t)$相同. 从此可推出 $P'$和 $P$ 所满足的是同一个发展方程(1.62)式. 有如下定理:

**定理 1.4** 设$\{V_j\}$为满足(1.61)式的关于 $P$ 的微分多项式,$P$ 是(1.62)式的解. 如果 $\lambda I - S$ 是(1.69)式的 Darboux 阵, $P' = P + [J, S]$, 则 $P'$与 $P$ 满足相同的方程(1.62)式.

**证明** 只需证明

$$V'_j = V_j[P'] \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{1.85}$$

就可以了.

为证明这一事实,先设 $P$ 为 $x$ 的可微的 $N\times N$ 矩阵值函数 ($P^{\text{diag}} = 0$); $S$ 为 $x$ 的可微 $N \times N$ 矩阵值函数,满足

$$S_x = [JS + P, S],$$

又令 $P' = P + [J, S]$ 是 $x$ 的另一可微 $N \times N$ 矩阵值函数 ($P'^{\text{diag}} = 0$), 首先注意,对于给定的可微函数 $P'$,至少在每一点的一个邻域必存在 $P$ 和 $S$ 使这些关系成立. 事实上,给了 $P'$之后,解 $S$ 的微分方程

$$S_x = [P' + SJ, S],$$

又令 $P = P' - [J, S]$, 就能使这些关系成立.

现在以 $P$ 代入微分多项式 $V_0$, …, $V_n$,依(1.77)式逐次作出$V'_0$, …, $V'_n$. 经过一定的计算,可得到恒等式

$$\begin{aligned}
&[J, V'_{j+1}] - V'_{j,x} + [P', V'_j] \\
&\quad = [J, V_{j+1}] - V_{j,x} + [P, V_j] + ([J, V'_j] - V'_{j-1,x} \\
&\qquad + [P', V'_{j-1}])S - S([J, V_j] - V_{j-1,x} + [P, V_{j-1}]) \\
&\qquad\quad (j = 0, \cdots, n-1).
\end{aligned}$$

根据 $V_j[P]$所满足的方程,用数学归纳法,就可知道

$$[J, V'_{j+1}] - V'_{j,x} + [P', V'_j] = 0 \quad (j = 0, \cdots, n-1).$$

此外,还可证明

$$V'^{\text{diag}}_{n,x} + [P', V'_n]^{\text{diag}} = 0.$$

这就是说，$V_j'$ 和 $P'$ 也满足(1.61)式. 这样，如前面所述，$V_j'$ 可表示为 $P'$ 的微分多项式

$$V_j' = V_j'[P'],$$

但这里的 $P'$ 可取为任意的可微分函数.

令

$$\Delta_j[P'] = V_j'[P'] - V_j[P'], \tag{1.86}$$

由(1.77)式知 $\Delta_0 = 0$. 假设 $\Delta_k = 0$，那么由(1.61)式可见

$$[J, \Delta_{k+1}] = \Delta_{k,x}^{\text{off}} - [P', \Delta_k]^{\text{off}} = 0,$$

从而得

$$\Delta_{k+1}^{\text{off}} = 0.$$

再从(1.61)式可见

$$\Delta_{k+1,x}^{\text{diag}} = [P', \Delta_{k+1}^{\text{off}}] = 0,$$

从而 $\Delta_{k+1}^{\text{diag}}[P']$ 与 $x$ 无关. 现在再证明 $\Delta_{k+1}^{\text{diag}}[P']$ 与 $P'$ 无关. 以 $P_{ij}'$ 记 $P'$ 的元素，以 $P_{ij}'^{(\alpha)}$ 记 $P_{ij}'$ 关于 $x$ 的 $\alpha$ 阶导数，又设 $\Delta_{k+1}^{\text{diag}}$ 含 $P'$ 的导数的最高阶次为 $r$，则

$$0 = \frac{\partial \Delta_{k+1}^{\text{diag}}}{\partial x} = \sum_{i,j} \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{\partial \Delta_{k+1}^{\text{diag}}}{\partial P_{ij}'^{(\alpha)}} P_{ij}'^{(\alpha+1)}, \tag{1.87}$$

此式中出现了 $P_{ij}'^{(r+1)}$，其系数必须为0，即 $\Delta_{k+1}^{\text{diag}}$ 不包含 $P'$ 的 $r$ 阶导数，特别是它和 $P'$ 无关. 我们特别取 $S = 0$，$P = P'$，从 $V_{k+1}'$ 的定义(1.77)式可见

$$\Delta_{k+1}^{\text{diag}} = 0.$$

这样就用数学归纳法证明了

$$V_j'[P'] = V_j[P'] \quad (j = 0, 1, \cdots, n),$$

其特殊情形(对 AKNS 系统的 Darboux 变换)就是要证明的(1.85)式. ∎

所以对 AKNS 系统中的发展型方程(1.62)式来说，上面给出的一次 Darboux 变换都将此方程的解变为同一方程的解.

注意到由

$$P' = P + [J, S], \quad \Phi' = (\lambda I - S)\Phi$$

所定义的 Darboux 变换

$$(P, \Phi) \longrightarrow (P', \Phi')$$

可以用同一的纯代数的算法继续进行下去,得到 AKNS 系统的解的无限系列

$$(P,\ \Phi) \longrightarrow (P',\ \Phi') \longrightarrow (P'',\ \Phi'') \longrightarrow \cdots.$$

### 1.3.3 高次 Darboux 变换与可换性定理

前面讨论的是一次 Darboux 变换,即 Darboux 阵关于 $\lambda$ 是线性的. 本段考虑 $\lambda$ 的多项式形式的 Darboux 阵,并利用二次 Darboux 阵的对称性得到著名的可换性定理.

显然,连续作 $r$ 回一次的 Darboux 变换,就会得出 $r$ 次的 Darboux 变换,但也可以直接作出显式表示的 $r$ 次 Darboux 阵.

在讨论一次 Darboux 阵时,由(1.82)式,即由 $SH = H\Lambda$ 可构作出 Darboux阵 $D(x,\ t,\ \lambda) = \lambda I - S$ (定理 1.2),并且 $SH = H\Lambda$ 等价于 $D(x,\ t,\ \lambda_i)h_i = 0$, 这里 $h_i$ 是 Lax 对在 $\lambda = \lambda_i$ 时的列向量解,且 $\det(h_1,\ \cdots,\ h_N) \neq 0$. 现在将这些事实推广到 $\lambda$ 的 $r$ 次多项式的情形,即讨论显式表达的形如

$$D(x,\ t,\ \lambda) = \sum_{j=0}^{r} D_{r-j}(x,\ t)\lambda^j,\quad D_0 = I \tag{1.88}$$

的 $N \times N$ Darboux 阵.

取 $Nr$ 个复数 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_{Nr}$, 再取 $\lambda = \lambda_i$ 时 Lax 对的列向量解 $h_i$ $(i = 1,\ \cdots,\ Nr)$. 记

$$F_r = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & & h_{Nr} \\ \lambda_1 h_1 & \lambda_2 h_2 & \cdots & \lambda_{Nr} h_{Nr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} h_1 & \lambda_2^{r-1} h_2 & \cdots & \lambda_{Nr}^{r-1} h_{Nr} \end{pmatrix}, \tag{1.89}$$

它是 $Nr \times Nr$ 阵,方程组

$$D(x,\ t,\ \lambda_i)h_i = 0$$

等价于

$$\sum_{j=0}^{r-1} D_{r-j}(x,\ t)\lambda_i^j h_i = -\lambda_i^r h_i \quad (i = 1,\ \cdots,\ Nr), \tag{1.90}$$

并且可写成为

$$(D_r,\ D_{r-1},\ \cdots,\ D_1)F_r = -(\lambda_1^r h_1,\ \cdots,\ \lambda_{Nr}^r h_{Nr}) \tag{1.91}$$

的形式,这是关于 $D$ 的系数 $(D_r, D_{r-1}, \cdots, D_1)$ 的线性代数方程组,在条件 $\det F_r \neq 0$ 时它存在唯一的解 $(D_r, D_{r-1}, \cdots, D_1)$, 所以当 $\det F_r \neq 0$ 时存在唯一的 $N$ 阶矩阵 $D(x, t, \lambda)$满足 $D(x, t, \lambda_i)h_i = 0$ $(i = 1, \cdots, Nr)$. 为了表示 $D$ 是由 $h_1, \cdots, h_{Nr}$ 作出的,我们将它记为 $D(h_1, \cdots, h_{Nr}, \lambda)$. 下面进一步说明它是一个 Darboux 阵,并给出它的一个分解[41, 61],即如下定理:

**定理 1.5**　给定 $Nr$ 个复数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{Nr}$. 设 $h_i$ 是 $\lambda = \lambda_i (i = 1, \cdots, Nr)$ 时 Lax 对(1.69)式的列向量解, $F_r$ 如(1.89)式所定义,如果 $\det F_r \neq 0$, 则有:

(1) 存在唯一的形如(1.88)式的矩阵 $D(h_1, \cdots, h_{Nr}, \lambda)$,使得

$$D(h_1, \cdots, h_{Nr}, \lambda_i)h_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, Nr),$$

并且 $D(h_1, \cdots, h_{Nr}, \lambda)$是(1.69)式的 $r$ 次 Darboux 阵.

(2) 如果 $\det F_{r-1} \neq 0$, 则上述 $r$ 次 Darboux 阵分解为一次 Darboux 阵和 $(r-1)$ 次 Darboux 阵的乘积:

$$\begin{aligned} & D(h_1, \cdots, h_{Nr}, \lambda) \\ & \quad = D(D(h_1, \cdots, h_{N(r-1)}, \lambda_{N(r-1)+1})h_{N(r-1)+1}, \cdots, \\ & \qquad D(h_1, \cdots, h_{N(r-1)}, \lambda_{Nr})h_{Nr}, \lambda)D(h_1, \cdots, h_{N(r-1)}, \lambda), \end{aligned} \tag{1.92}$$

式中第一因子为一次 Darboux 阵,第二因子为 $(r-1)$ 次 Darboux 阵.

(3) 一般的 $D(h_1, \cdots, h_{Nr}, \lambda)$可分解为 $r$ 个一次 Darboux 阵之积.

(4) $P' = P - [J, D_1]$ 是方程(1.62)式的解.

**证明**　(1)中矩阵 $D$ 的存在性和唯一性已在上文得出了. 现证(2). 记

$$\Lambda_k = \operatorname{diag}(\lambda_{N(k-1)+1}, \cdots, \lambda_{Nk}),$$

$$H_k = (h_{N(k-1)+1}, \cdots, h_{Nk}),$$

则

$$F_r = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & & H_r \\ H_1\Lambda_1 & H_2\Lambda_2 & \cdots & H_r\Lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_1\Lambda_1^{r-1} & H_2\Lambda_2^{r-1} & \cdots & H_r\Lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}. \tag{1.93}$$

由

$$F_{r-1}=\begin{pmatrix} H_1 & H_2 & & H_{r-1} \\ H_1\Lambda_1 & H_2\Lambda_2 & \cdots & H_{r-1}\Lambda_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_1\Lambda_1^{r-2} & H_2\Lambda_2^{r-2} & \cdots & H_{r-1}\Lambda_{r-1}^{r-2} \end{pmatrix}$$

非退化,可作一个关于$\lambda$的最高次为$r-1$次的矩阵$D(h_1, \cdots, h_{N(r-1)}, \lambda)$满足

$$D(h_1, \cdots, h_{N(r-1)}, \lambda_i)h_i=0 \quad (i=1, 2, \cdots, N(r-1)).$$

记

$$h_i'=D(h_1, \cdots, h_{N(r-1)}, \lambda_i)h_i \quad (i=N(r-1)+1, \cdots, Nr),$$

再作一次矩阵$D(h'_{N(r-1)+1}, \cdots, h'_{Nr}, \lambda)$,并记

$$D'(\lambda)=D(h'_{N(r-1)+1}, \cdots, h'_{Nr}, \lambda)D(h_1, \cdots, h_{N(r-1)}, \lambda),$$

则 $D'(\lambda_i)h_i=0 \quad (i=1, 2, \cdots, N(r-1))$. 又对$i=N(r-1)+1, \cdots, Nr$, 有

$$D'(\lambda_i)h_i=D(h'_{N(r-1)+1}, \cdots, h'_{Nr}, \lambda_i)\, h_i'=0,$$

所以 $D'(\lambda)=D(\lambda)$.

这样,就将一个由(1.90)式决定的$r$次矩阵分解成了一个$r-1$次和一个一次矩阵的复合,即得到了(1.92)式.(2)得证.

对于$D(h_1, \cdots, h_{N(r-1)}, \lambda)$, 如果相应的$F_{r-2}$, $F_{r-3}$, …的行列式均不为0, 则可以重复上述过程,结果就能把$D(h_1, \cdots, h_N, \lambda)$写成$r$个关于$\lambda$线性的矩阵的乘积.由于$r=1$时,$D(h_1, \cdots, h_N, \lambda)$是Darboux阵,所以由数学归纳法知$D(h_1, \cdots, h_{Nr}, \lambda)$也是Darboux阵,且它可分解为$r$个一次Darboux阵的乘积

$$D=(\lambda I-S_r)\cdots(\lambda I-S_1).$$

由于$\det F_r\neq 0$, 总能通过同时交换$\Lambda_i$和$H_i$的下标,使得$F_{r-2}$, $F_{r-3}$, …的行列式均不为0.(3)得证,并且$D$为Darboux阵((1)的第二个结论)也得证.

由于

$$D_1=-(S_1+\cdots+S_r),$$

经$\lambda I-S_1$变换后, $P\rightarrow P'=P+[J, S_1]$, 经$\lambda I-S_2$变换后, $P'\rightarrow$

$P'' = P' + [J, S_2]$，依次类推得，经 $D$ 变换后，

$$P \to P + [J, S_1 + \cdots + S_r] = P - [J, D_1],$$

所以 $P - [J, D_1]$ 是方程(1.62)式的解.(4)得证. ■

以下我们叙述和证明 Darboux 变换的一个重要性质——可换性定理，这个定理发源于 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换，后来有许多推广和证明，这里的证明可见文献[41]($2 \times 2$ 情形)和文献[25]($N \times N$ 情形)，这个证明不用任何边界条件，而且关于参数的配置具有最确切的表述.

从解$(P, \Phi(\lambda))$出发，以 $\lambda_1^{(1)}, \cdots, \lambda_N^{(1)}$ 为参数，以 $h_i^{(1)} = \Phi(\lambda_i) l_i^{(1)}$ 作 Darboux 变换，得到解$(P^{(1)}, \Phi^{(1)}(\lambda))$，这里 $l_i^{(1)}$ 是 $N$ 个常值列向量；再选取 $\lambda_1^{(2)}, \cdots, \lambda_N^{(2)}$ 和 $l_i^{(2)}$，对$(P^{(1)}, \Phi^{(1)}(\lambda))$作 Darboux 变换，得$(P^{(1,2)}, \Phi^{(1,2)}(\lambda))$.

同样，从解$(P, \Phi(\lambda))$出发，以 $\lambda_i^{(2)}$, $l_i^{(2)}$ 为参数作 Darboux 变换，得$(P^{(2)}, \Phi^{(2)}(\lambda))$，再以 $\lambda_i^{(1)}$, $l_i^{(1)}$ 为参数作 Darboux 变换，得$(P^{(2,1)}, \Phi^{(2,1)}(\lambda))$. 由上所述得如下定理：

**定理 1.6**　(可换性定理)

$$(P^{(1,2)}, \Phi^{(1,2)}(\lambda)) = (P^{(2,1)}, \Phi^{(2,1)}(\lambda)). \tag{1.94}$$

**证明**　根据定理 1.5 可知，$\Phi^{(1,2)}(\lambda)$和 $\Phi^{(2,1)}(\lambda)$都是由 $\Phi(\lambda)$经二次的 Darboux 变换得到的，有表达式

$$\Phi^{(1,2)}(\lambda) = D(h_1^{(1)}, \cdots, h_N^{(1)}, h_1^{(2)}, \cdots, h_N^{(2)}, \lambda), \Phi(\lambda),$$

$$\Phi^{(2,1)}(\lambda) = D(h_1^{(2)}, \cdots, h_N^{(2)}, h_1^{(1)}, \cdots, h_N^{(1)}, \lambda), \Phi(\lambda),$$

由定理 1.5 的(1)可见，此两式的右端又是相等的，所以可换性定理成立. ■

可换性定理可以用如下形式表示：

$$\begin{array}{ccc}
(P, \Phi) & \xrightarrow{\Lambda^{(1)}, L^{(1)}} & (P^{(1)}, \Phi^{(1)}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Lambda^{(2)}, L^{(2)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Lambda^{(2)}, L^{(2)}} \\
& & (P^{(1,2)}, \Phi^{(1,2)}) \\
(P^{(2)}, \Phi^{(2)}) & \xrightarrow{\Lambda^{(1)}, L^{(1)}} & \| \\
& & (P^{(2,1)}, \Phi^{(2,1)})
\end{array} \tag{1.95}$$

这里 $L^{(1)}$ 和 $L^{(2)}$ 分别表示列向量组 $l_i^{(1)}$ 与 $l_i^{(2)}$.

**注 1.10** 高次 Darboux 变换的研究使理论更完整了. 分解定理表示高次的 Darboux 变换可以由一次 Darboux 变换生成. 所以在应用上就可以用多回一次的 Darboux 变换来代替高次的 Darboux 变换,这样可以避免阶数很高($Nr$ 阶)的行列式的计算. 由于一次 Darboux 变换的计算公式(算法)是纯代数的,所以可以反复运用同一套算法来得出一系列的解,这对于利用计算机进行符号运算来求解是非常方便的.

**注 1.11** 定理 1.6 的证明是对显式表达的 Darboux 变换而作的. 由于非显式表达的 Darboux 阵可以看成为显式表达的 Darboux 阵的极限,所以这个可换性定理对于非显式表达的 Darboux 变换也成立.

### 1.3.4 一次 Darboux 阵的进一步结果

本段中要说明,由定理 1.2 给出的 Darboux 阵方法不仅适用于 AKNS 系统,而且适用于许多其他的 Lax 对,特别是当 $U$, $V$ 是 $\lambda$ 的多项式的情形;另一方面,也要说明这种 Darboux 阵事实上包含了所有可对角化的形如 $\lambda I-S$ 的 Darboux 阵,而不可对角化的 Darboux 阵可以由可对角化的 Darboux 阵的极限得到.

首先,我们将 Lax 对(1.69)式推广为

$$\begin{aligned}\Phi_x &= U\Phi,\\ \Phi_t &= V\Phi,\end{aligned} \tag{1.96}$$

其中 $U$, $V$ 是谱参数 $\lambda$ 的多项式:

$$\begin{aligned}U(x,t,\lambda) &= \sum_{j=0}^{m} U_j(x,t)\lambda^{m-j},\\ V(x,t,\lambda) &= \sum_{j=0}^{n} V_j(x,t)\lambda^{n-j},\end{aligned} \tag{1.97}$$

式中 $U_j$, $V_j$ 是 $N\times N$ 矩阵.

显然,(1.96)式的可积条件为

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{1.98}$$

本段中仍要讨论没有约化的 Lax 对的 Darboux 阵,即认为 $U_j$, $V_j$ 的各个元素之间除可积条件(1.98)式以外,没有任何其他的约束. 换言之,

所研究的非线性偏微分方程组就是(1.98)式,也即它左侧关于 $\lambda$ 展开式的各次系数为 0 所得的方程组,而其未知函数就是 $N\times N$ 阵 $U_i$, $V_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$. 与第一段类似, $D=\lambda I-S$ 为 Darboux 阵等价于存在

$$\begin{aligned} U'(x,t,\lambda) &= \sum_{j=0}^{m} U'_j(x,t)\lambda^{m-j}, \\ V'(x,t,\lambda) &= \sum_{j=0}^{n} V'_j(x,t)\lambda^{n-j}, \end{aligned} \tag{1.99}$$

使 $\Phi'=D\Phi=(\lambda I-S)\Phi$ 满足

$$\begin{aligned} \Phi'_x &= U'\Phi', \\ \Phi'_t &= V'\Phi', \end{aligned} \tag{1.100}$$

这里 $\Phi$ 是(1.96)式的基本解,$U'$, $V'$是$\lambda$ 的 $m$ 与 $n$ 次的多项式.

易见,$U'$, $V'$有表达式

$$\begin{aligned} U' &= DUD^{-1}+D_xD^{-1}, \\ V' &= DVD^{-1}+D_tD^{-1}, \end{aligned} \tag{1.101}$$

而且 $U'$, $V'$满足

$$U'_t-V'_x+[U',V']=0. \tag{1.102}$$

问题仍在于求出 $S$ 使(1.100)式能够成立. 在求出 $S$ 之后,就有了 Darboux变换

$$(U,V,\Phi)\to(U',V',\Phi').$$

与定理 1.1、1.2、1.3 相对应,有如下定理:

**定理 1.1′**　$\lambda I-S$ 是(1.96)式的一次 Darboux 阵当且仅当 $S$ 满足

$$\begin{aligned} S_x+[S,U(S)] &= 0, \\ S_t+[S,V(S)] &= 0. \end{aligned} \tag{1.103}$$

式中

$$U(S)=\sum_{j=0}^{m}U_jS^{m-j},\quad V(S)=\sum_{j=0}^{n}V_jS^{n-j}. \tag{1.104}$$

设$(U,V)$满足可积条件(1.98)式. 对给定的常值对角阵 $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$, 令 $h_i$ 为(1.96)式当 $\lambda=\lambda_i$ 时的列向量解, $H=(h_1,\cdots,h_N)$. 当 $\det H\neq 0$ 时,令 $S=H\Lambda H^{-1}$, 则有:

**定理 1.2′** 矩阵 $\lambda I - S$ 是(1.96)式的 Darboux 阵.

**定理 1.3′** 方程组(1.103)式是完全可积的.

以上定理的证明同前面相应定理的证明完全类似,在此从略.要注意的是对 AKNS 系统,把 $V_i[P]$ 的偏微分方程逐步解出,取定"积分常数"使得 $V_i[P]$ 成为 $P$ 的微分多项式,从而只剩下关于 $P$ 的偏微分方程(1.62)式.现在一切 $U_i$, $V_i$ 都作为独立的未知函数来处理,它们的偏微分方程为(1.98)式,具体地说,令其右端关于 $\lambda$ 展开的各次系数为 0,就是这个偏微分方程组的显式形式.

定理 1.2′的逆定理也成立.

**定理 1.7** (1) 如果 $\lambda I - S$ 是(1.96)式的 Darboux 阵,且在某一点可对角化,则存在常值对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ 和 Lax 对(1.96)式当 $\lambda = \lambda_i$ 时的列向量解 $h_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$,使在该点的适当邻域中 $H = (h_1, \cdots, h_N)$ 非退化,且 $S = H\Lambda H^{-1}$.

(2) 如果 $\lambda I - S$ 是(1.96)式的处处不可对角化的 Darboux 阵,则存在显式表达的(即可对角化的)Darboux 阵序列 $\lambda I - S_k$,使 $S_k$ 及其关于 $x$, $t$ 的导数在适当的区域中分别处处收敛于 $S$ 及其导数.

本定理的证明与定理 1.3 的证明类似,这里不再重复.

**例 1.5** 处处不可对角化的 Darboux 阵的例子:

考虑 Lax 对

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \begin{pmatrix} \lambda & p \\ q & -\lambda \end{pmatrix} \Phi, \\ \Phi_t &= \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\lambda^2 + \mathrm{i}pq & -2\mathrm{i}\lambda p - \mathrm{i}p_x \\ -2\mathrm{i}\lambda q + \mathrm{i}q_x & 2\mathrm{i}\lambda^2 - \mathrm{i}pq \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \tag{1.105}$$

它的可积条件给出非线性发展方程组

$$\begin{cases} \mathrm{i}p_t = p_{xx} - 2p^2 q, \\ -\mathrm{i}q_t = q_{xx} - 2pq^2. \end{cases} \tag{1.106}$$

此方程组有解:

$$p = \alpha\,\mathrm{sech}(\alpha x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^2 t}, \quad q = -\alpha\,\mathrm{sech}(\alpha x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^2 t}, \tag{1.107}$$

这是由平凡解 $p = q = 0$ 出发,以

$$\Lambda = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix}e^{-i\alpha^2 t/2} & 0\\ 0 & e^{i\alpha^2 t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\alpha x/2} & -e^{-\alpha x/2}\\ e^{-\alpha x/2} & e^{\alpha x/2}\end{pmatrix}$$

所作的 Darboux 阵 $D = \lambda I - H\Lambda H^{-1}$ 给出的解. 现在以(1.107)式作种子解,相应的 Lax 对(1.105)式的基本解为

$$(\lambda I - H\Lambda H^{-1})\begin{pmatrix}e^{\lambda x - 2i\lambda^2 t} & 0\\ 0 & e^{-\lambda x + 2i\lambda^2 t}\end{pmatrix}.$$

取

$$\Lambda^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则可取

$$H^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix}h_{11}^{(\varepsilon)} & h_{12}^{(\varepsilon)}\\ h_{21}^{(\varepsilon)} & h_{22}^{(\varepsilon)}\end{pmatrix},$$

式中

$$h_{11}^{(\varepsilon)} = \left(\frac{2\varepsilon^2}{\alpha} - \varepsilon\tanh(\alpha x)\right)e^{\theta} - \frac{\alpha}{2}\operatorname{sech}(\alpha x)e^{-i\alpha^2 t - \theta},$$

$$h_{12}^{(\varepsilon)} = -\varepsilon\tanh(\alpha x) + \operatorname{sech}(\alpha x)e^{-i\alpha^2 t},$$

$$h_{21}^{(\varepsilon)} = -\varepsilon\operatorname{sech}(\alpha x)e^{i\alpha^2 t + \theta} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\tanh(\alpha x)\right)e^{-\theta},$$

$$h_{22}^{(\varepsilon)} = -\varepsilon\operatorname{sech}(\alpha x)e^{i\alpha^2 t} - \tanh(\alpha x),$$

$$\theta = \varepsilon x - 2i\varepsilon^2 t.$$

从而,当 $\varepsilon \to 0$ 时,有

$$H^{(\varepsilon)}\Lambda^{(\varepsilon)}(H^{(\varepsilon)})^{-1} \to S,$$

$$S = \frac{\alpha}{\Delta}\begin{pmatrix}\sinh(\alpha x)e^{-i\alpha^2 t} & e^{-2i\alpha^2 t}\\ -\sinh^2(\alpha x) & -\sinh(\alpha x)e^{-i\alpha^2 t}\end{pmatrix},$$

$$p' = \frac{2\alpha e^{-2i\alpha^2 t}}{\Delta}, \quad q' = \frac{2\alpha\sinh^2(\alpha x)}{\Delta},$$

式中

$$\Delta = (\alpha + 2 - 2\,\mathrm{sech}(\alpha x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^2 t})\cosh^2(\alpha x).$$

注意到 $S$ 的两个特征值全为 0,但 $S \neq 0$,所以 $S$ 是不可对角化的,但根据作法可知,$\lambda I - S$ 是一个 Darboux 阵,即 $S$ 满足(1.103)式.

最后要说明的是:1.3.3 小节中关于高次 Darboux 阵及可换性定理的结果,对一般的 Lax 对(1.96)式同样成立. 此外,当将(1.96)式中的 $U$,$V$ 推广为 $\lambda$ 的有理函数时,类似的结果仍成立[87].

## §1.4 KdV 梯队、MKdV-SG 梯队和 NLS 梯队

上节中讨论了一般的 AKNS 系统(以及更一般的系统)的 Darboux 变换,当时假定它们是无约化的,即 $P$ 的非对角元素之间没有任何约束. 但是事实上,会遇到存在约束的情形,我们必须考虑这些约束条件. 在构作 Darboux 变换时,要保证这些约束条件在变换后仍然成立,这是技巧性相当强的问题,在许多情况下,这种约化问题已解决得很好,但还缺乏统一的(普适的)方法.

本节中要讨论 $N=2$, $p$, $q$ 有约束时的一些具体方程,它们是 $2\times 2$ AKNS 系统的一些特殊的非常有用的情形. 它们是:(1) KdV 梯队:$p$ 是实函数,$q=-1$; (2) MKdV-SG 梯队:$q=-p$ 是实函数; (3) NLS 梯队:$q=-\bar{p}$. 这些情形已有过不少研究[68],但只限于 KdV 等单个方程. 这里是用统一的方法处理整个梯队,并且系数可与 $t$ 有关. 这种处理方式首先见于文献[24, 35].

### 1.4.1 KdV 梯队[35]

考虑 Lax 对

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U\Phi, \\ \Phi_t &= V\Phi, \end{aligned} \tag{1.108}$$

式中

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta - u & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \tag{1.109}$$

$A$, $B$, $C$ 是谱参数 $\zeta$ 的多项式.

与§1.2 类似,由可积条件(1.58)式得

$$-A_x + C - B(\zeta - u) = 0,$$
$$B_x + 2A = 0, \tag{1.110}$$
$$-u_t - C_x + 2A(\zeta - u) = 0.$$

由前两个方程,得

$$A = -\frac{1}{2}B_x,$$
$$C = \zeta B - uB - \frac{1}{2}B_{xx}. \tag{1.111}$$

将(1.111)式代入(1.110)式的第三式,得

$$u_t = -2(\zeta - u)B_x + u_x B + \frac{1}{2}B_{xxx}. \tag{1.112}$$

现在令

$$B = \sum_{j=0}^{n} b_j(x,\ t)\zeta^{n-j},$$

则由(1.112)式得出

$$b_{0,\ x} = 0,$$
$$b_{j+1,\ x} = ub_{j,\ x} + \frac{1}{2}u_x b_j + \frac{1}{4}b_{j,\ xxx} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1), \tag{1.113}$$

$$u_t = 2ub_{n,\ x} + u_x b_n + \frac{1}{2}b_{n,\ xxx}. \tag{1.114}$$

(1.114)式给出了 $u$ 所满足的方程,当 $n \geqslant 2$ 时,通常称之为高阶 KdV 方程.

与引理 1.2 类似,由(1.113)式,有

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j}(t) b_j^0[u],$$

其中 $b_j^0[u]$满足递推关系(1.113)式及 $b_0^0[0] = 1,\ b_j^0[0] = 0\ (j \geqslant 1)$. 显然,$b_j^0[u]$由(1.113)式唯一确定.

开始的几个 $b_j^0$ 为

$$b_0^0 = 1,\quad b_1^0 = \frac{1}{2}u,$$
$$b_2^0 = \frac{1}{8}u_{xx} + \frac{3}{8}u^2,\quad \cdots, \tag{1.115}$$

相应的方程为:

$n=0$: 有线性方程

$$u_t=\alpha_0(t)u_x,$$

$n=1$: 有

$$u_t=\alpha_0(t)\left(\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{2}uu_x\right)+\alpha_1(t)u_x, \tag{1.116}$$

如果 $\alpha_0=$ 常数, $\alpha_1=0$, (1.116)式就是通常形式下的 KdV 方程.

$n=2$: 有

$$u_t=\alpha_0(t)\left(\frac{1}{16}u_{xxxxx}+\frac{5}{8}uu_{xxx}+\frac{5}{4}u_xu_{xx}+\frac{15}{8}u^2u_x\right)$$
$$+\alpha_1(t)\left(\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{2}uu_x\right)+\alpha_2(t)u_x, \tag{1.117}$$

通常称为 5 阶 KdV 方程.

下面讨论 KdV 梯队的 Darboux 变换,还是利用前面关于 AKNS 系统的一般结果. 从形式上看,计算似乎麻烦一些,但由此可以对一般的方法有进一步的了解. 与 § 1.1 中的叙述相比较,可以看出这里的方法是对整个梯队有效的.

(1.109)式给出的 $U$, $V$ 与 AKNS 系统的形式有所不同,但可通过一个与 $\zeta$ 有关的常值矩阵作相似变换,使得 Lax 对变为 AKNS 系统的形式.

令

$$\begin{aligned} R&=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\quad(\lambda^2=\zeta),\\ \Psi&=R\Phi,\\ \widetilde{U}&=RUR^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda & u\\ -1 & -\lambda\end{pmatrix},\\ \widetilde{V}&=RVR^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda B-A & \lambda^2B-2\lambda A-C\\ -B & A-\lambda B\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{1.118}$$

则 $\Psi$ 满足

$$\Psi_x=\widetilde{U}\Psi,\quad \Psi_t=\widetilde{V}\Psi. \tag{1.119}$$

这就是 KdV 方程的 Lax 对的 AKNS 形式. 由 § 1.3 的讨论,要作它的 Darboux 阵,先要取常数 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 及当 $\lambda=\lambda_1$, $\lambda_2$ 时 Lax 对的列向量解 $h_1$,

$h_2$. 不过,这里要求经 Darboux 变换后得到的矩阵仍然具有(1.118)式中所指出的形状,即

$$\widetilde{U}' = \begin{pmatrix} \lambda & u' \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{V}' = \begin{pmatrix} \lambda B[u'] - A[u'] & \lambda^2 B[u'] - 2\lambda A[u'] - C[u'] \\ -B[u'] & A[u'] - \lambda B[u'] \end{pmatrix}, \tag{1.120}$$

只有 $\lambda_2$ 与 $\lambda_1$, $h_2$ 与 $h_1$ 之间有一定的关系才能做到这一点(即使得$\widetilde{U}'$的第二行第一元素为$-1$).

如果$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$是 Lax 对(1.119)式当 $\lambda = \lambda_0$ 时的解,那么可直接验证得$\begin{pmatrix} \alpha + 2\lambda_0\beta \\ \beta \end{pmatrix}$是(1.119)式当 $\lambda = -\lambda_0$ 时的解. 现在取

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 2\lambda_0\beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}, \tag{1.121}$$

作

$$S = H\Lambda H^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 - \dfrac{1}{\tau} & \dfrac{1}{\tau^2} + \dfrac{2\lambda_0}{\tau} \\ -1 & \dfrac{1}{\tau} + \lambda_0 \end{pmatrix}, \tag{1.122}$$

式中 $\tau = \beta/\alpha$, 并记

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\lambda I - S), \tag{1.123}$$

则以$\widetilde{D}$为 Darboux 阵,经$\widetilde{D}$变换后,有

$$\widetilde{U}' = \widetilde{D}\,\widetilde{U}\,\widetilde{D}^{-1} + \widetilde{D}_x\,\widetilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & u' \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

其中

$$u' = -u - 2\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\lambda_0}{\tau}\right). \tag{1.124}$$

根据对 AKNS 系统的一般讨论,$V'$ 由(1.120)式的第二式给出,从而

(1.123)式定义的$\widetilde{D}$是 KdV 梯队中一个方程到自身的 Darboux 变换. 至此,我们已完成了对整个梯队普适的 Darboux 变换公式.

为了和§1.1的叙述相比较,注意,如果$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$是(1.119)式当$\lambda=\lambda_0$时的解,则(1.108)式相应的解是

$$R^{-1}(\lambda_0)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha+\lambda_0\beta\end{pmatrix}. \tag{1.125}$$

记$\sigma$为此解的第二个与第一个分量之比,即

$$\sigma=\frac{\alpha+\lambda_0\beta}{-\beta}=-\frac{1}{\tau}-\lambda_0, \tag{1.126}$$

则$\sigma$满足

$$\sigma_x=\lambda_0^2-u-\sigma^2, \tag{1.127}$$

且

$$S=\begin{pmatrix}\sigma & \sigma^2-\lambda_0^2\\ -1 & -\sigma\end{pmatrix}. \tag{1.128}$$

为得到(1.108)式形式的 Lax 对的 Darboux 阵,令

$$\begin{aligned}D&=R^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(\lambda I-S)R\\ &=\begin{pmatrix}-\sigma & 1\\ \lambda^2-\lambda_0^2+\sigma^2 & -\sigma\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-\sigma & 1\\ \zeta-\zeta_0+\sigma^2 & -\sigma\end{pmatrix}\quad(\zeta_0=\lambda_0^2).\end{aligned} \tag{1.129}$$

可直接验证,这时,

$$U'=DUD^{-1}+D_xD^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \zeta-2\zeta_0+u+2\sigma^2 & 0\end{pmatrix}. \tag{1.130}$$

由此也可看出,$D$保持 Lax 对的$x$部分的形式不变,且将$u$变为

$$u'=2\zeta_0-u-2\sigma^2 \tag{1.131}$$

(这同(1.124)式给出的结果相同). 由定理 1.4 可知,$V'[u]=V[u']$,即保持 Lax 对的$t$部分不变. 归纳上述的作法及讨论,则有如下定理:

**定理 1.8**　如果 $u$ 是(1.114)式的解，$\zeta_0$ 是任一非零实数，$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ 是 Lax 对(1.108)式当 $\zeta=\zeta_0$ 时的一个解，$\sigma=\beta/\alpha$，则

$$D=\begin{pmatrix}-\sigma & 1\\ \zeta-\zeta_0+\sigma^2 & -\sigma\end{pmatrix} \tag{1.132}$$

是(1.108)式的一个 Darboux 阵，它将(1.114)式的一个解 $u$ 变为同一个方程的解

$$u'=2\zeta_0-u-2\sigma^2. \tag{1.133}$$

**注 1.12**　从(1.129)式中取 $D=R^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(\lambda I-S)R$，而不是 $R^{-1}(\lambda I-S)R$. 这是为了使 $\widetilde{U}'$ 与 $\widetilde{U}$ 具有相同的左下角元素(−1)，从而使(1.114)式的一个解变为(1.114)式自身的另一个解.

**注 1.13**　如果记 $\Phi=\begin{pmatrix}\phi\\ \phi_x\end{pmatrix}$，则 $\phi$ 满足

$$\begin{aligned}\phi_{xx}&=(\zeta-u)\phi,\\ \phi_t&=A\phi+B\phi_x.\end{aligned} \tag{1.134}$$

形式上这与§1.1类似，不过这里的 $A$ 和 $B$ 关于 $\zeta$ 可以是任意次，其系数是 $\phi$ 的适当的微分多项式. §1.1所讨论的只是一个非常特殊的情形.

在上述定理 1.8 中，$\beta=\alpha_x$，故 $\sigma=\alpha_x/\alpha$. (1.129)式中的变换 $D$ 给出

$$\phi\to\phi'=\phi_x-\sigma\phi=\phi_x-\frac{\alpha_x}{\alpha}\phi, \tag{1.135}$$

而由(1.127)式及(1.131)式得到最原始的 Darboux 变换式

$$u'=u+2(\ln\alpha)_{xx}. \tag{1.136}$$

**注 1.14**　从(1.113)式逐次得出 $b_0$，$b_1$，…时，积分常数都可以是 $t$ 的函数，因而所得的非线性方程的系数也可以含有 $t$ 的函数，如例子(1.116)式、(1.117)式所示. 这些系数依赖于 $t$ 的方程的解与不依赖于 $t$ 的方程的解的运动与相互作用有很大的不同. 系数不依赖于 $t$ 的方程的孤立子解沿同一方向作等速运动，波峰高的速度也快，而系数依赖于 $t$ 的

方程的孤立子解是变速运动的，例如可以作振荡运动，波峰高的孤立子其速度也可以是慢的[35].

### 1.4.2 MKdV-SG 梯队[24]

考虑 Lax 对

$$\begin{aligned}\Phi_x &= U\Phi = \begin{pmatrix}\lambda & p\\ -p & -\lambda\end{pmatrix}\Phi,\\ \Phi_t &= V\Phi = \begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}\Phi,\end{aligned}\tag{1.137}$$

其中，$A$, $B$, $C$ 是 $\lambda$, $\lambda^{-1}$ 的多项式，满足

$$A(-\lambda) = -A(\lambda),\quad B(-\lambda) = -C(\lambda),\tag{1.138}$$

并假设

$$A = \sum_{j=0}^{n+m} a_j\lambda^{2n-2j+1}\tag{1.139}$$

$(m \geqslant 0,\ n \geqslant 0)$. 与前面讨论的 AKNS 系统不同的是，这里的 $A$, $B$, $C$ 不再限制为 $\lambda$ 的多项式，而允许 $\lambda$ 的负幂次出现，(1.139)式中出现最低的负次幂为 $a_{n+m}\lambda^{-2m+1}$.

由可积条件 $U_t - V_x + [U, V] = 0$ 得

$$\begin{aligned}&A_x = p(B+C),\\ &p_t - B_x - 2pA + 2\lambda B = 0,\\ &p_t + C_x + 2pA + 2\lambda C = 0.\end{aligned}\tag{1.140}$$

由此，有

$$\begin{aligned}B+C &= \frac{A_x}{p} = \sum_{j=0}^{n+m}\frac{a_{j,x}}{p}\lambda^{2n-2j+1},\\ B-C &= \frac{(B+C)_x + 4pA}{2\lambda}\\ &= \sum_{j=0}^{n+m}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a_{j,x}}{p}\right)_x + 2pa_j\right)\lambda^{2n-2j},\end{aligned}\tag{1.141}$$

(从这里可知，$B(-\lambda) = -C(\lambda)$ 自然满足)及

$$p_t = \frac{1}{2}(B-C)_x - \lambda(B+C).\tag{1.142}$$

比较(1.142)式中 $\lambda$ 的各项系数,得到 $a_j$ 满足的递推关系,它们包括两部分,即由 $\lambda$ 的正幂次的系数得

$$a_{0,x}=0,$$
$$a_{j+1,x}=\frac{1}{4}p\left(\left(\frac{a_{j,x}}{p}\right)_x+4a_jp\right)_x\quad(j=0,1,\cdots,n-1),\tag{1.143}$$

由 $\lambda$ 的负幂次的系数得

$$\left(\left(\frac{a_{n+m,x}}{p}\right)_x+4a_{n+m}p\right)_x=0,$$
$$\left(\left(\frac{a_{j,x}}{p}\right)_x+4a_jp\right)_x=4\,\frac{a_{j+1,x}}{p}\quad(j=n+m-1,\cdots,n+1),\tag{1.144}$$

此外,由不含 $\lambda$ 的项得到方程

$$p_t-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{a_{n,x}}{p}\right)_x+4a_np\right)_x+\frac{a_{n+1,x}}{p}=0.\tag{1.145}$$

开始几个 $a_j(0\leqslant j\leqslant n)$ 为

$$a_0=\alpha_0(t),$$
$$a_1=\frac{1}{2}\alpha_0(t)p^2+\alpha_1(t),$$
$$a_2=\alpha_0(t)\left(\frac{1}{4}pp_{xx}-\frac{1}{8}p_x^2+\frac{3}{8}p^4\right)+\frac{1}{2}\alpha_1(t)p^2+\alpha_2(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots.\tag{1.146}$$

当 $V$ 中不含 $\lambda$ 的负次幂,即 $m=0$ 时,由前面对 AKNS 系统讨论的结果可知,所有这些 $a_j$ 都是 $p$ 的微分多项式,方程(1.145)式成为

$$p_t-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{a_{n,x}}{p}\right)_x+4a_np\right)_x=0,\tag{1.147}$$

这称为广义 MKdV 梯队. 若用§1.2所引入的 $p$ 的微分多项式 $a_j^0$ 表出,这些方程可写成为

$$p_t+\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(t)M_{n-j}[p]=0,\tag{1.148}$$

其中

$$M_l[p]=-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{a_{l,x}^0}{p}\right)_x+4a_l^0p\right)_x \quad (l=0,1,\cdots,n). \quad (1.149)$$

特别是,如果 $n=1$,并取 $\alpha_0=-4$, $\alpha_1=0$,则(1.147)式化为通常形式下的 MKdV 方程:

$$p_t+p_{xxx}+6p^2p_x=0. \quad (1.150)$$

下面考虑当 $V$ 中出现 $\lambda$ 的负次幂,即 $m>0$ 的情形. 置 $p=-u_x/2$,且引入边界条件:当 $x\to-\infty$ 时,$u-k\pi$ 连同它的各阶导数充分快地趋于 0($k$ 是某一整数).

由(1.144)式的第一式得

$$\left(\left(\frac{a_{n+m,x}}{u_x}\right)_x+a_{n+m}u_x\right)_x=0. \quad (1.151)$$

把 $a_{n+m}$ 置为 $u$ 的函数,上面的方程化为

$$((a_{n+m,uu}+a_{n+m})u_x)_x=0, \quad (1.152)$$

为使此式对一般的函数 $u(x)$ 成立,我们选

$$a_{n+m}=\alpha\cos(u+\beta), \quad (1.153)$$

其中 $\alpha$, $\beta$ 是常数.

现在取 $a_{n+m}$ 的一个特殊值 $a_{n+m}^0=\frac{1}{4}\cos u$. 再看 $a_{n+j}(j=1,2,\cdots,m-1)$,记 $g_{n+j}=a_{n+j,x}^0/p$,则 $g_{n+m}=\frac{1}{2}\sin u$,且

$$a_{j-1}^0=\int_{-\infty}^x pg_{j-1}\mathrm{d}x+a_{j-1}^- \quad (n+2\leqslant j\leqslant n+m). \quad (1.154)$$

式中 $a_{j-1}^-$ 是 $a_{j-1}^0$ 在 $x\to-\infty$ 的极限值. 引入边界条件 $\lim\limits_{x\to-\infty}(g_{j-1})_x=0$,递推关系(1.144)式成为

$$\frac{1}{4}(g_{j-1})_x+p\left(a_{j-1}^-+\int_{-\infty}^x pg_{j-1}\mathrm{d}x\right)=\int_{-\infty}^x g_j\mathrm{d}x. \quad (1.155)$$

进一步假设

$$\lim_{x\to-\infty}g_{j-1}=0, \quad (1.156)$$

则

$$g_{j-1}+4\int_{-\infty}^{x}p(\xi)\left(a_{j-1}^{-}+\int_{-\infty}^{\xi}p(\zeta)g_{j-1}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}\xi$$

$$=4\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\xi}g_{j}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.157}$$

这是一个 Volterra 型积分方程,在当 $x\to-\infty$ 时本身及其导数充分快地趋于零的函数类中存在唯一解.

现在取 $a_{j-1}^{-}=0$, 并将(1.157)式的解记为

$$g_{j-1}=Q(g_{j})=Q^{2}(g_{j+1})=\cdots=\frac{1}{2}Q^{n+m-j+1}[\sin u], \tag{1.158}$$

式中 $Q$ 表示由 $g_j$ 决定 $g_{j-1}$ 的算子,它是由(1.157)式定义的,不是 $g_j$ 的微分多项式.

如果 $n=0$, $\alpha_0=0$, 则得到 SG 梯队

$$p_{t}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\beta_{j}(t)Q^{m-j-1}[\sin u]=0, \tag{1.159}$$

式中 $\beta_j(t)$是 $t$ 的任意函数.

一般地,可得到复合的 MKdV-SG 梯队

$$p_{t}+\sum_{j=0}^{n}\alpha_{j}(t)M_{n-j}[p]+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\beta_{j}(t)Q^{m-j-1}[\sin u]=0$$

$$\left(p=-\frac{u_{x}}{2}\right). \tag{1.160}$$

**例 1.6**　$n=0$, $m=2$, $\beta_0=0$, $\beta_1=1$, 这时, $g_2=\frac{1}{2}\sin u$, 方程成为 sine-Gordon 方程

$$u_{xt}=\sin u. \tag{1.161}$$

**例 1.7**　$n=1$, $m=2$, $\alpha_0=-4$, $\alpha_1=0$, $\beta_0=0$, $\beta_1=1$, 则得到文献[57]中描述的1维非线性原子格点的方程

$$u_{xt}+\frac{3}{2}u_{x}^{2}u_{xx}+u_{xxxx}-\sin u=0. \tag{1.162}$$

下面讨论 Darboux 变换:对于 Lax 对(1.137)式当 $\lambda=\lambda_0$ 时的解 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$,容易验证 $\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$是(1.137)式当 $\lambda=-\lambda_0$ 时的解. 因而取

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

与前面一样,令 $\sigma = \beta/\alpha$,

$$S = H\Lambda H^{-1} = \frac{\lambda_0}{1+\sigma^2}\begin{pmatrix} 1-\sigma^2 & 2\sigma \\ 2\sigma & \sigma^2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{1.163}$$

为方便计,记 $\tan\frac{\theta}{2} = \sigma$, 则

$$S = \lambda_0 \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1.164}$$

并且由 $\sigma_x = -p(1+\sigma^2) - 2\lambda_0\sigma$ 得

$$\theta_x = -2p - 2\lambda_0 \sin\theta. \tag{1.165}$$

经直接验证,

$$(\lambda I - S)U(\lambda I - S)^{-1} - S_x(\lambda I - S)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & p' \\ -p' & -\lambda \end{pmatrix},$$

式中

$$p' = p + 2\lambda_0 \sin\theta = -p - \theta_x, \tag{1.166}$$

或等价地,在适当选取积分常数时,

$$u' = -u + 2\theta. \tag{1.167}$$

剩下要证明的是,Darboux 阵 $\lambda I - S$ 保持 MKdV-SG 的约化不变,这包括:(1)变换后的 $A'$, $B'$, $C'$仍满足 $A'(-\lambda) = -A'(\lambda)$, $B'(-\lambda) = -C(\lambda)$;(2)系数 $a_j(t)$保持不变.

注意到 $V^T(-\lambda) = -V(\lambda)$, $S^T = S$ 及$(\lambda I + S)^T(\lambda I - S) = \lambda^2 I - S^2 = (\lambda^2 - \lambda_0^2)I$, 经计算得 $V'^T(-\lambda) = -V'(\lambda)$, 这就证明了(1).

(2)的证明如下:对于 $a_j(j \leqslant n)$, 这在 AKNS 系统中已讨论过,对于 $a_j(j \geqslant n+1)$, 利用无穷远处的边界条件即得所需的结果.

从而有以下定理:

**定理 1.9** 如果 $u$ 是(1.145)式的解,$\lambda_0$ 是非零实数, $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ 是 Lax 对(1.137)式在 $\lambda = \lambda_0$ 时的解. 令 $\theta = 2\tan^{-1}(\beta/\alpha)$,

$$S = \lambda_0 \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1.168}$$

则 $\lambda I - S$ 是(1.137)式的一个 Darboux 变换,它将(1.145)式的一个解 $p$ 变为同一个方程的解 $p' = p + 2\lambda_0 \sin\theta$. 同时,在适当的边界条件下, $u' = -u + 2\theta$, 这里 $p = -u_x/2$, $p' = -u'_x/2$.

**注 1.15**　对于 sine-Gordon 方程,在 19 世纪已经出现了一种求解的方法,称为 Bäcklund 变换. 这种方法把从一个已知解求出新解的方法归结于求解一个完全可积的微分方程组(或者进一步再利用可换性定理得出新解的显式表达式,即利用非线性迭加公式),而 Darboux 变换恰好能给出这个方程组的显式解. 在第 4 章中将讨论这个问题.

### 1.4.3　NLS 梯队

NLS 梯队(非线性 Schrödinger 梯队)所相应的 Lax 对为

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & p \\ -\bar{p} & -\lambda \end{pmatrix} \Phi, \\ \Phi_t &= V\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \tag{1.169}$$

其中,$A$, $B$, $C$ 是 $\lambda$ 的多项式($\lambda$, $p$, $A$, $B$, $C$ 均可取复值),满足

$$A(-\bar{\lambda}) = -\overline{A(\lambda)}, \quad B(-\bar{\lambda}) = -\overline{C(\lambda)} \tag{1.170}$$

(即 $V^*(-\bar{\lambda}) = -V(\lambda)$, $*$ 表示矩阵的转置共轭). 这也是 AKNS 系统的一个特殊情形,我们要作出保持上述约化的 Darboux 变换.

由可积条件

$$U_t - V_x + [U, V] = 0$$

得

$$\begin{aligned} A_x &= pC + \bar{p}B, \\ B_x &= p_t + 2\lambda B - 2pA, \\ C_x &= -\bar{p}_t - 2\lambda C - 2\bar{p}A. \end{aligned} \tag{1.171}$$

也可利用(1.48)式写出 $A$, $B$, $C$ 中 $\lambda$ 的各次的系数,它们与 $p$, $p_x$, … 及一些积分常数 $\alpha_j(t)$ 有关,同时得出非线性发展方程

$$p_t = b_{n,x} + 2pa_n. \tag{1.172}$$

特别,当 $n = 2$, $\alpha_0 = -2\mathrm{i}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时,得到非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}p_t = p_{xx} + 2|p|^2 p. \tag{1.173}$$

非线性 Schrödinger 梯队的 Darboux 变换的构造也从选择 $\Lambda$, $H$ 开始. 如果 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ 是(1.169)式当 $\lambda = \lambda_0$ 时的一个非平凡解,那么 $\begin{pmatrix}-\bar{\beta}\\ \bar{\alpha}\end{pmatrix}$ 是(1.169)式当 $\lambda = -\bar{\lambda}_0$ 时的解. 于是取

$$\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & -\bar{\lambda}_0\end{pmatrix},\quad H = \begin{pmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{pmatrix},$$

$$S = H\Lambda H^{-1} = \frac{1}{1+|\sigma|^2}\begin{pmatrix}\lambda_0 - \bar{\lambda}_0|\sigma|^2 & (\lambda_0 + \bar{\lambda}_0)\bar{\sigma}\\ (\lambda_0 + \bar{\lambda}_0)\sigma & -\bar{\lambda}_0 + \lambda_0|\sigma|^2\end{pmatrix}, \tag{1.174}$$

其中 $\sigma = \beta/\alpha$. 注意到 $\det H \neq 0$, 所以 $S$ 是整体可定义的. 容易验证 $H$ 满足

$$H^* H = |\alpha|^2 + |\beta|^2, \tag{1.175}$$

从而 $S$ 满足

$$\begin{aligned} S^* S &= |\lambda_0|^2,\\ S - S^* &= \lambda_0 - \bar{\lambda}_0. \end{aligned} \tag{1.176}$$

于是,经过以 $\lambda I - S$ 为 Darboux 阵的 Darboux 变换,$U$ 变成

$$\begin{aligned} U' &= (\lambda I - S)U(\lambda I - S)^{-1} - S_x(\lambda I - S)^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda & p'\\ -\bar{p}' & -\lambda\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

式中

$$p' = p + 2S_{12} = p + \frac{2(\lambda_0 + \bar{\lambda}_0)\bar{\sigma}}{1+|\sigma|^2}. \tag{1.177}$$

由对 AKNS 系统的讨论(定理 1.4)可知, $V' = (\lambda I - S)V(\lambda I - S)^{-1} - S_t(\lambda I - S)^{-1}$ 仍为 $\lambda$ 的多项式, $V'^*(-\bar{\lambda}) = -V'(\lambda)$, 并且 $\lambda I - S$ 给出非线性 Schrödinger 梯队中的每个方程到自身的 Darboux 变换,即

**定理 1.10**　设 $p$ 是(1.172)式的解,$\lambda_0$ 是任一非实数的复数,$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ 是 Lax 对(1.169)式在 $\lambda=\lambda_0$ 时的解. 记 $\sigma=\beta/\alpha$,

$$S=\frac{1}{1+|\sigma|^2}\begin{pmatrix}\lambda_0-\bar{\lambda}_0|\sigma|^2 & (\lambda_0+\bar{\lambda}_0)\bar{\sigma}\\ (\lambda_0+\bar{\lambda}_0)\sigma & -\bar{\lambda}_0+\lambda_0|\sigma|^2\end{pmatrix}, \tag{1.178}$$

则 $\lambda I-S$ 是(1.169)式的一个 Darboux 变换,它将(1.172)式的一个解 $p$ 变为(1.172)式的另一个解

$$p'=p+\frac{2(\lambda_0+\bar{\lambda}_0)\bar{\sigma}}{1+|\sigma|^2}. \tag{1.179}$$

# §1.5　Darboux 变换与散射、反散射理论

散射与反散射理论是孤立子理论中一个重要部分,它将一个可积非线性偏微分方程的求解转化为对它的 Lax 对的谱及特征函数性质的描写. 下面以复的 $2\times2$ AKNS 系统为例,说明散射与反散射理论的主要内容,并讨论具有 $su(2)$ 约化时散射数据在 Darboux 变换下的变化. 对于 KdV 方程,完全可以按同样的方法来阐明,那时散射和反散射理论更简单一些,是以二阶方程(1.1)的特征问题为基础的. 这是一项已经充分发展的理论,这里只能叙述这个理论的概要,其证明请参阅有关著作[17, 67].

## 1.5.1　2×2 AKNS 系统的散射理论概要

首先叙述 $2\times2$ 复 AKNS 系统的散射数据的定义,为与通常的散射理论中的记号一致,我们记 $\lambda=-\mathrm{i}\zeta$,则 $2\times2$ AKNS 系统(1.43)式的第一个方程成为

$$\Phi_x=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\zeta & p\\ q & \mathrm{i}\zeta\end{pmatrix}\Phi. \tag{1.180}$$

假设 $p$, $q$ 及其关于 $x$ 的导数在无穷远处充分快地趋于 0. 记 $\mathbf{C}$ 为复数平面,$\mathbf{R}$ 为实轴,又记 $\mathbf{C}_+$ 和 $\mathbf{C}_-$ 为 $\mathbf{C}$ 的上半平面和下半平面,即 $\mathbf{C}_+=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}\,\zeta>0\}$, $\mathbf{C}_-=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}\,\zeta<0\}$.

**性质 1** (1.180)式的满足下列四种条件的列向量解分别存在且唯一：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \psi_r(x,\zeta)=R(x,\zeta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta x},\quad \lim_{x\to-\infty}R(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\\
&(\operatorname{Im}\zeta\geqslant 0);\\
&(2)\ \tilde{\psi}_r(x,\zeta)=\widetilde{R}(x,\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta x},\quad \lim_{x\to-\infty}\widetilde{R}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\\
&(\operatorname{Im}\zeta\leqslant 0);\\
&(3)\ \psi_l(x,\zeta)=L(x,\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta x},\quad \lim_{x\to+\infty}L(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\\
&(\operatorname{Im}\zeta\geqslant 0);\\
&(4)\ \tilde{\psi}_l(x,\zeta)=\widetilde{L}(x,\zeta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta x},\quad \lim_{x\to+\infty}\widetilde{L}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\\
&(\operatorname{Im}\zeta\leqslant 0),
\end{aligned}
\tag{1.181}
$$

而且 $\psi_r$, $\psi_l(\tilde{\psi}_r, \tilde{\psi}_l)$关于 $\zeta$ 在 $\mathbf{C}_+\cup\mathbf{R}(\mathbf{C}_-\cup\mathbf{R})$ 连续，在 $\mathbf{C}_+(\mathbf{C}_-)$解析. 这些解称为 Jost 解.

对 $\zeta\in\mathbf{R}$，因 $\psi_l$, $\tilde{\psi}_l$ 线性无关，故存在 $\zeta$ 的函数 $r_+(\zeta)$, $r_-(\zeta)$, $\tilde{r}_+(\zeta)$, $\tilde{r}_-(\zeta)$，使

$$
\begin{aligned}
\psi_r&=r_+\psi_l+r_-\tilde{\psi}_l,\\
\tilde{\psi}_r&=\tilde{r}_+\psi_l+\tilde{r}_-\tilde{\psi}_l.
\end{aligned}
\tag{1.182}
$$

利用对 $\psi_r$ 与 $\psi_l$, $\tilde{\psi}_r$ 与$\tilde{\psi}_l$ 的 Wronski 行列式的讨论可得如下性质：

**性质 2** 对 $\zeta\in\mathbf{R}$，有

$$
\begin{aligned}
r_-(\zeta)&=R_1(x,\zeta)L_2(x,\zeta)-R_2(x,\zeta)L_1(x,\zeta),\\
\tilde{r}_+(\zeta)&=\widetilde{R}_2(x,\zeta)\widetilde{L}_1(x,\zeta)-\widetilde{R}_1(x,\zeta)\widetilde{L}_2(x,\zeta),
\end{aligned}
\tag{1.183}
$$

且 $r_-(\zeta)$ 可解析延拓到 $\mathbf{C}_+\cup\mathbf{R}$; $\tilde{r}_+(\zeta)$ 可解析延拓到 $\mathbf{C}_-\cup\mathbf{R}$. 这里 $R_1$, $R_2$ 是向量 $R$ 的两个分量，即 $R=(R_1, R_2)^{\mathrm{T}}$. $L_1$, $L_2$, $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$, $\widetilde{L}_1$, $\widetilde{L}_2$ 的意义也类似.

性质 1 中给出的四个解当 $x\to\pm\infty$ 时的渐近性质如下.

**性质 3** (1) 下列各极限关于 $\zeta$ 一致成立：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} R(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbf{C}_+\cup\mathbf{R},\\
&\lim_{x\to-\infty} \widetilde{R}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbf{C}_-\cup\mathbf{R},\\
&\lim_{x\to+\infty} L(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbf{C}_+\cup\mathbf{R},\\
&\lim_{x\to+\infty} \widetilde{L}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbf{C}_-\cup\mathbf{R}.
\end{aligned}
\tag{1.184}
$$

(2) 下列各极限当$\zeta$取在任一紧集内时关于$\zeta$一致成立：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} R(x,\zeta)=\begin{pmatrix}r_-(\zeta)\\0\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbf{C}_+,\\
&\lim_{x\to+\infty} \widetilde{R}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\\widetilde{r}_+(\zeta)\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbf{C}_-,\\
&\lim_{x\to-\infty} L(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\r_-(\zeta)\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbf{C}_+,\\
&\lim_{x\to-\infty} \widetilde{L}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}\widetilde{r}_+(\zeta)\\0\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbf{C}_-.
\end{aligned}
\tag{1.185}
$$

(3) 下列各极限关于$\zeta\in\mathbf{R}$一致成立：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left|R(x,\zeta)-\begin{pmatrix}r_-(\zeta)\\r_+(\zeta)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\zeta x}\end{pmatrix}\right|=0,\quad \zeta\in\mathbf{R},\\
&\lim_{x\to+\infty}\left|\widetilde{R}(x,\zeta)-\begin{pmatrix}\widetilde{r}_-(\zeta)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\zeta x}\\\widetilde{r}_+(\zeta)\end{pmatrix}\right|=0,\quad \zeta\in\mathbf{R},\\
&\lim_{x\to-\infty}\left|L(x,\zeta)-\begin{pmatrix}-\widetilde{r}_-(\zeta)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\zeta x}\\r_-(\zeta)\end{pmatrix}\right|=0,\quad \zeta\in\mathbf{R},\\
&\lim_{x\to-\infty}\left|\widetilde{L}(x,\zeta)-\begin{pmatrix}\widetilde{r}_+(\zeta)\\-r_+(\zeta)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\zeta x}\end{pmatrix}\right|=0,\quad \zeta\in\mathbf{R}.
\end{aligned}
\tag{1.186}
$$

如果将(1.180)式改写成

$$\mathscr{L}\Phi=\zeta\Phi, \tag{1.187}$$

其中

$$\mathscr{L}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}\right), \tag{1.188}$$

则(1.180)式就成为一个一阶线性常微分算子的谱问题. 我们在 $L^2(\mathbf{R})\times L^2(\mathbf{R})$ 中讨论它的谱.

若 $\zeta\in\mathbf{C}_+$, $r_-(\zeta)=0$, 那么由(1.182)式, $\psi_r$ 与 $\psi_l$ 线性相关,因而 $x\to\pm\infty$ 时都有 $\psi_r\to 0$. 同样,若 $\psi\in\mathbf{C}_-$, $\tilde{r}_+(\zeta)=0$, 则 $\tilde{\psi}_r$ 与 $\tilde{\psi}_l$ 线性相关,因而 $x\to\pm\infty$ 时, $\tilde{\psi}_r\to 0$. 由于 $r_-(\zeta)$, $\tilde{r}_+(\zeta)$ 分别在 $\mathbf{C}_+$, $\mathbf{C}_-$ 为解析,所以它们的零点是离散的,这些零点称为**离散特征值**,记其集合为 $IP\sigma(\mathscr{L})$. 当 $\zeta\in\mathbf{R}$ 时,可以证明(1.187)具有有界的非平凡解. $\sigma(\mathscr{L})=\mathbf{R}\cup IP\sigma(\mathscr{L})$ 称为**算子的谱**,而 $\mathbf{C}-\sigma(\mathscr{L})$ 称为 $\mathscr{L}$ 的正则集. 有下列性质成立:

**性质 4** 如果在 $\zeta\in\mathbf{R}$ 时 $r_-(\zeta)\neq 0$, $\tilde{r}_+(\zeta)\neq 0$, 则 $IP\sigma(\mathscr{L})$ 是有限集.

以下总假设,当 $\zeta\in\mathbf{R}$ 时, $r_-(\zeta)\neq 0$, $r_+(\zeta)\neq 0$. 先讨论离散特征值如下:

当 $\zeta\in IP\sigma(\mathscr{L})$ 时, $\psi_r$ 与 $\psi_l$ 线性相关,设

$$\begin{aligned} &\psi_r(x,\zeta)=\alpha(\zeta)\psi_l(x,\zeta) \quad (\zeta\in\mathbf{C}_+\cap IP\sigma(\mathscr{L})), \\ &\tilde{\psi}_r(x,\zeta)=\tilde{\alpha}(\zeta)\tilde{\psi}_l(x,\zeta) \quad (\zeta\in\mathbf{C}_-\cap IP\sigma(\mathscr{L})). \end{aligned} \tag{1.189}$$

记

$$IP\sigma(\mathscr{L})\cap\mathbf{C}_+=\{\zeta_1,\cdots,\zeta_d\},$$

$$IP\sigma(\mathscr{L})\cap\mathbf{C}_-=\{\tilde{\zeta}_1,\cdots,\tilde{\zeta}_{\tilde{d}}\}$$

分别是 $\mathbf{C}_+$ 和 $\mathbf{C}_-$ 中的离散特征值,又假设 $\zeta_1,\cdots,\tilde{\zeta}_{\tilde{d}}$ 都是单重的零点. 相应于每个离散特征值,有相应的常数

$$\begin{aligned} &C_k=\alpha(\zeta_k)\Big/\frac{\mathrm{d}\,r_-(\zeta_k)}{\mathrm{d}\zeta} \quad (k=1,\cdots,d), \\ &\tilde{C}_k=\tilde{\alpha}(\zeta_k)\Big/\frac{\mathrm{d}\,\tilde{r}_+(\tilde{\zeta}_k)}{\mathrm{d}\zeta} \quad (k=1,\cdots,\tilde{d}). \end{aligned} \tag{1.190}$$

根据这些数据,定义函数

$$B_d(y)=-\mathrm{i}\sum_{k=1}^{d}C_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta_k y},\quad \widetilde{B}_d(y)=\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\tilde{d}}\widetilde{C}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta_k y}.\tag{1.191}$$

它们反映出离散谱点的分布和一定的性质.

下面讨论连续谱 $\zeta\in\mathbf{R}$:如所知,速降函数 $\phi$ 的 Fourier 变换为

$$F(\phi)(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\mathrm{d}s,\tag{1.192}$$

它可以延拓到 $L^2(\mathbf{R})$上,成为 $L^2(\mathbf{R})$到 $L^2(\mathbf{R})$的映照.

**性质 5**

$$L(x,\cdot)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in L^2(\mathbf{R}),\quad \widetilde{L}(x,\cdot)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in L^2(\mathbf{R}).\tag{1.193}$$

若记

$$\begin{aligned}N(x,s)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\left[L(x,\cdot)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right](s),\\ \widetilde{N}(x,s)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-1}\left[\widetilde{L}(x,\cdot)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right](s)\quad(s\geqslant 0),\end{aligned}\tag{1.194}$$

则

$$\begin{aligned}&(1)\ L(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int_0^{+\infty}N(x,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta s}\mathrm{d}s,\quad\forall\,\zeta\in\mathbf{C}_+\cup\mathbf{R},\\ &\quad\ \widetilde{L}(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_0^{+\infty}\widetilde{N}(x,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta s}\mathrm{d}s,\quad\forall\,\zeta\in\mathbf{C}_-\cup\mathbf{R},\end{aligned}\tag{1.195}$$

上述积分绝对收敛;

$$\begin{aligned}&(2)\ p(x)=-2N_1(x,0),\\ &\quad\ q(x)=-2\widetilde{N}_2(x,0),\end{aligned}\tag{1.196}$$

式中下标表示分量.

对连续谱 $\zeta$ 引入记号

$$b(\zeta)=\frac{r_+(\zeta)}{r_-(\zeta)},\quad \tilde{b}(\zeta)=\frac{\tilde{r}_-(\zeta)}{\tilde{r}_+(\zeta)},\tag{1.197}$$

可以证明

$$b,\ \widetilde{b} \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}) \cap C^0(\mathbf{R}), \tag{1.198}$$

从而可定义

$$\begin{aligned} B_c(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta y}\,\mathrm{d}\,\zeta, \\ \widetilde{B}_c(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{b}(\zeta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta y}\,\mathrm{d}\,\zeta. \end{aligned} \tag{1.199}$$

上面讨论中得出的

$$\begin{aligned} &\{\zeta_k,\ C_k(k=1,\ \cdots,\ d),\ \widetilde{\zeta}_k,\ \widetilde{C}_k(k=1,\ \cdots,\ \widetilde{d}), \\ &\quad b(\zeta),\ \widetilde{b}(\zeta)(\zeta \in \mathbf{R})\} \end{aligned} \tag{1.200}$$

称为相应于$(p,\ q)$的**散射数据**,记为$\Sigma(p,\ q)$.有时也将

$$\{r_-(\zeta)(\zeta \in \mathbf{C}_+ \cup \mathbf{R}),\quad \widetilde{r}_+(\zeta)(\zeta \in \mathbf{C}_- \cup \mathbf{R})\} \tag{1.201}$$

称为散射数据,因为(1.200)式中的数据均可由(1.201)式中的数据导出.

由(1.191)式、(1.199)式可定义函数 $B = B_c + B_d$, $\widetilde{B} = \widetilde{B}_c + \widetilde{B}_d$.

**性质 6** $N$, $\widetilde{N}$满足线性积分方程组(Gelfand-Levitan-Marchenko 方程组) $(s \geqslant 0)$

$$\begin{aligned} &N(x,\ s) + \widetilde{B}(2x+s)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &\qquad + \int_0^{+\infty} \widetilde{N}(x,\ \sigma)\,\widetilde{B}(2x+s+\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0, \\ &\widetilde{N}(x,\ s) + B(2x+s)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ &\qquad + \int_0^{+\infty} N(x,\ \sigma)B(2x+s+\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0. \end{aligned} \tag{1.202}$$

如果已知散射数据$\{\zeta_k,\ C_k,\ \widetilde{\zeta}_k,\ \widetilde{C}_k,\ b_r(\zeta),\ \widetilde{b}_r(\zeta)\}$,通过上述积分方程可解出 $N$, $\widetilde{N}$,从而(1.196)式重新给出$(p,\ q)$.

从$(p,\ q)$求出散射数据的过程称为**散射过程**,它需要讨论的是常微

分方程组的谱问题,从散射数据到$(p, q)$的过程称为**反散射过程**,它需要解一个线性积分方程组.

再叙述散射数据的演化规律.因为在AKNS系统中,$p$, $q$是$(x,t)$的函数,所以必须考虑时间变量$t$.下面考虑散射数据是如何随时间$t$而变化的,这时就要利用完整的Lax对

$$
\begin{aligned}
\Phi_x &= \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\,\zeta & p \\ q & \mathrm{i}\,\zeta \end{pmatrix}\Phi, \\
\Phi_t &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}\Phi,
\end{aligned} \tag{1.203}
$$

其中$A$, $B$, $C$是$\zeta$的多项式:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{j=0}^{n} a_j(-\mathrm{i}\,\zeta)^{n-j}, \\
B &= \sum_{j=0}^{n} b_j(-\mathrm{i}\,\zeta)^{n-j}, \\
C &= \sum_{j=0}^{n} c_j(-\mathrm{i}\,\zeta)^{n-j},
\end{aligned} \tag{1.204}
$$

并设

$$
A\,|_{p=q=0} = \mathrm{i}\,\omega(\zeta,t). \tag{1.205}
$$

由引理1.2知,$B\,|_{p=q=0} = C\,|_{p=q=0} = 0$.

**性质7** 如果$(p, q)$满足可积条件给出的方程组

$$
\begin{cases} p_t = b_{n,x} + 2pa_n, \\ q_t = c_{n,x} - 2qa_n, \end{cases} \tag{1.206}
$$

那么相应的散射数据的演化规律是:

$$
\begin{aligned}
& r_-(\zeta, t) = r_-(\zeta, 0), \quad \zeta \in \mathbf{C}_+ \cup \mathbf{R}, \\
& \tilde{r}_+(\zeta, t) = \tilde{r}_+(\zeta, 0), \quad \zeta \in \mathbf{C}_- \cup \mathbf{R}, \\
& r_+(\zeta, t) = r_+(\zeta, 0)\exp\left(-2\mathrm{i}\int_0^t \omega(\zeta, \tau)\mathrm{d}\tau\right), \quad \zeta \in \mathbf{R}, \\
& \tilde{r}_-(\zeta, t) = \tilde{r}_-(\zeta, 0)\exp\left(2\mathrm{i}\int_0^t \omega(\zeta, \tau)\mathrm{d}\tau\right), \quad \zeta \in \mathbf{R},
\end{aligned} \tag{1.207}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\zeta_k(t) = \zeta_k(0), \\
&\tilde{\zeta}_k(t) = \tilde{\zeta}_k(0), \\
&C_k(t) = C_k(0)\exp\left(-2\mathrm{i}\int_0^t \omega(\zeta_k, \tau)\mathrm{d}\tau\right), \\
&\widetilde{C}_k(t) = \widetilde{C}_k(0)\exp\left(2\mathrm{i}\int_0^t \omega(\zeta_k, \tau)\mathrm{d}\tau\right), \\
&b(\zeta, t) = b(\zeta, 0)\exp\left(-2\mathrm{i}\int_0^t \omega(\zeta, \tau)\mathrm{d}\tau\right), \\
&\tilde{b}(\zeta, t) = \tilde{b}(\zeta, 0)\exp\left(2\mathrm{i}\int_0^t \omega(\zeta, \tau)\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}
\tag{1.208}
$$

(1.207)式或(1.208)式都显式地描述了散射数据的演化规律.

用反散射方法求解一个关于$(p, q)$的非线性发展方程(1.206)式的初值问题的过程如下:设$(p_0, q_0)$是初值,先解关于$(p_0, q_0)$的 Lax 对(1.203)式得出 $p_0$, $q_0$ 相应的散射数据,然后利用演化规则(1.208)式得到$(p(t), q(t))$所相应的散射数据,最后解积分方程组(1.202)式得出$(p(t), q(t))$. 从而,反散射方法将一个非线性偏微分方程的初值问题的求解转化为一个线性积分方程的求解,这成为求解 Cauchy 问题的一种有效的方法. 特别是,当 $b_r = \tilde{b}_r = 0$ 时, $B_c = \widetilde{B}_c = 0$, (1.202)式是带退化核的积分方程,因而可以用代数方法求解,所得到的是孤立子解[17].

**注 1.16** 如果用$\Sigma(p, q)$记由函数$(p(x, t), q(x, t))$所决定的散射数据,$p_0(x)$, $q_0(x)$是 $t = 0$ 时的初始条件,则用反散射方法解初值问题的图解如下:

$$
\begin{array}{llcl}
t = t: & (p, q) & \xleftarrow{\text{反散射}} & \Sigma(p, q) \\
 & & & \uparrow \text{演化} \\
t = 0: & (p_0, q_0) & \xrightarrow{\text{散射}} & \Sigma(p_0, q_0)
\end{array}
\tag{1.209}
$$

对线性方程,如果把图中的“散射”改为“Fourier 变换”,“反散射”改为“Fourier 逆变换”,则就成为用 Fourier 方法求解初值问题的图解了. 所以往往把散射、反散射方法看成非线性问题中的 Fourier 方法.

### 1.5.2　带$su(2)$约化的 AKNS 系统的散射数据及其 Darboux 变换

对 AKNS 系统,散射数据包括$\{\zeta_k,\ C_k,\ \tilde{\zeta}_k,\ \tilde{C}_k,\ b_r(\zeta),\ \tilde{b}_r(\zeta)\}$. 本小节中所称的带 $su(2)$约化的 AKNS 系统,是指当$\zeta\in\mathbf{R}$时,$U,\ V\in su(2)$,即 $q=-\bar{p},\ \bar{A}=-A,\ C=-\bar{B}$. 这时,对$\zeta\in\mathbf{R}$, Lax 对为

$$\Phi_x=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\zeta & p\\ -\bar{p} & \mathrm{i}\zeta\end{pmatrix}\Phi,\qquad \Phi_t=\begin{pmatrix}A & B\\ -\bar{B} & -A\end{pmatrix}\Phi. \tag{1.210}$$

如果$\begin{pmatrix}a(\zeta)\\ b(\zeta)\end{pmatrix}$是(1.210)式的解,则$\begin{pmatrix}-\overline{b(\bar{\zeta})}\\ \overline{a(\bar{\zeta})}\end{pmatrix}$也是它的解,于是有如下性质:

**性质 8**　对于 Lax 对(1.210)式,当$\zeta\in\mathbf{R}$时,Jost 解之间有如下的关系:

$$\tilde{R}_1=-\bar{R}_2,\quad \tilde{R}_2=\bar{R}_1,\qquad \tilde{L}_1=\bar{L}_2,\quad \tilde{L}_2=-\bar{L}_1, \tag{1.211}$$

从而,在实轴上,有

$$\tilde{r}_+(\zeta)=\bar{r}_-(\zeta),\quad \tilde{r}_-(\zeta)=-\bar{r}_+(\zeta). \tag{1.212}$$

于是,对特征值适当编号后,有

$$\tilde{d}=d,\quad \tilde{\zeta}_k=\bar{\zeta}_k,\quad \tilde{C}_k=-\bar{C}_k,\quad \tilde{b}(\zeta)=-\bar{b}(\zeta)\quad(\zeta\in\mathbf{R}). \tag{1.213}$$

从而,$\zeta_k\in\mathbf{C}_+,\ C_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ d)$及$b(\zeta)(\zeta\in\mathbf{R})$就可以代表全部散射数据.

现在考察具有 $su(2)$约化的 AKNS 系统的散射数据在 Darboux 变换下的变化.

从前面关于 NLS 梯队的讨论可知道,如果 $p$ 是在$(-\infty,\ +\infty)$有定义的,那么所得到的 Darboux 阵也是在$(-\infty,\ +\infty)$中整体定义的.

为了要应用反散射理论，我们要求 $p$ 及其导数在无穷远充分快地趋于 0.

取常数 $\mu$ 及 Lax 对的一个列向量解：

$$\psi_r(\zeta_0)-\mu\psi_l(\zeta_0)=\begin{pmatrix}R_1(\zeta_0)e^{-i\zeta_0 x}-\mu L_1(\zeta_0)e^{i\zeta_0 x}\\ R_2(\zeta_0)e^{-i\zeta_0 x}-\mu L_2(\zeta_0)e^{i\zeta_0 x}\end{pmatrix}\quad(\zeta_0\in\mathbf{C}_+),\tag{1.214}$$

$\sigma$ 为它的第二与第一分量之比

$$\sigma=\frac{R_2(\zeta_0)-\mu L_2(\zeta_0)e^{2i\zeta_0 x}}{R_1(\zeta_0)-\mu L_1(\zeta_0)e^{2i\zeta_0 x}},\tag{1.215}$$

则 Darboux 阵为

$$-i\zeta I-S$$
$$=-i\zeta I-\frac{1}{1+|\sigma|^2}\begin{pmatrix}-i\zeta_0-i\bar{\zeta}_0|\sigma|^2 & (-i\zeta_0+i\bar{\zeta}_0)\bar{\sigma}\\ (-i\zeta_0+i\bar{\zeta}_0)\sigma & -i\bar{\zeta}_0-i\zeta_0|\sigma|^2\end{pmatrix},\tag{1.216}$$

解的变换为

$$p'=p+2i\frac{(\bar{\zeta}_0-\zeta_0)\bar{\sigma}}{1+|\sigma|^2}.\tag{1.217}$$

Darboux 变换后散射数据的变化由以下定理给出[62]：

**定理 1.11** 设 $p$ 对应的(1.210)式的散射数据为 $r_-(\zeta)$ $(\zeta\in\mathbf{C}_+\cup\mathbf{R})$，$r_+(\zeta)$ $(\zeta\in\mathbf{R})$和 $\alpha(\zeta_k)$ $(k=1,\cdots,d)$，那么经 Darboux 阵(1.216)式的作用后 $(\mu\neq 0,\ \zeta_0\in\mathbf{C}_+)$，相应的散射数据的变换如下：

(1) 如果 $\zeta_0$ 不是离散特征值，经 Darboux 变换后，原有的特征值保持不变，且增加了一个特征值 $\zeta_0$，而且

$$\begin{aligned}&r'_-(\zeta)=\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\bar{\zeta}_0}r_-(\zeta)\quad(\zeta\in\mathbf{C}_+\cup\mathbf{R}),\\&r'_+(\zeta)=r_+(\zeta)\quad(\zeta\in\mathbf{R}),\\&\alpha'(\zeta_k)=\alpha(\zeta_k)\quad(k=1,\cdots,d),\\&\alpha'(\zeta_0)=1/\mu,\end{aligned}\tag{1.218}$$

从而

$$
\begin{aligned}
& b'(\zeta) = \frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} b(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbf{R}), \\
& C'_k = \frac{\zeta_k - \bar{\zeta}_0}{\zeta_k - \zeta_0} C_k \quad (k = 1, \cdots, d), \\
& C'_0 = \frac{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0}{\mu r_-(\zeta_0)}.
\end{aligned} \tag{1.219}
$$

(2) 如果 $\zeta_0$ 是离散特征值，$\zeta_0 = \zeta_j$，且 $\mu \neq \alpha(\zeta_j)$，则经 Darboux 变换后消去了特征值 $\zeta_0$，

$$
\begin{aligned}
& r'_-(\zeta) = \frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} r_-(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbf{C}_+ \cup \mathbf{R}), \\
& r'_+(\zeta) = r_+(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbf{R}), \\
& \alpha'(\zeta_k) = \alpha(\zeta_k) \quad (k = 1, \cdots, d, k \neq j),
\end{aligned} \tag{1.220}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
& b'(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} b(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbf{R}), \\
& C'_k = \frac{\zeta_k - \zeta_0}{\zeta_k - \bar{\zeta}_0} C_k \quad (k = 1, \cdots, d, k \neq j).
\end{aligned} \tag{1.221}
$$

**证明**　(1) $\zeta_0 \notin IP\sigma(\mathscr{L})$

这时，(1.215)式的分子和分母均非 0，且由性质 3，有

$$
\lim_{x \to -\infty} \sigma = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \sigma = 0,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x \to -\infty} (-\mathrm{i}\zeta I - S) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\bar{\zeta}_0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\zeta_0 \end{pmatrix}, \\
& \lim_{x \to +\infty} (-\mathrm{i}\zeta I - S) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\zeta_0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\bar{\zeta}_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.222}
$$

经 Darboux 变换后，Jost 解为

$$
\begin{aligned}
& \psi'_r(x, t, \zeta) = \frac{1}{-\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\bar{\zeta}_0} (-\mathrm{i}\zeta I - S) \psi_r(x, t, \zeta), \\
& \psi'_l(x, t, \zeta) = \frac{1}{-\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\bar{\zeta}_0} (-\mathrm{i}\zeta I - S) \psi_l(x, t, \zeta),
\end{aligned} \tag{1.223}
$$

所以

$$R' = \frac{1}{-\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\bar{\zeta}_0}(-\mathrm{i}\zeta I - S)R. \tag{1.224}$$

当 $\zeta \in \mathbf{C}_+$ 时，

$$\lim_{x \to +\infty} R' = \begin{pmatrix} \dfrac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_-(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$r'_-(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} r_-(\zeta), \tag{1.225}$$

这时，$r'_-(\zeta)$ 比 $r_-(\zeta)$增加了一个零点 $\zeta_0$，即 $\zeta_0$ 是一个新的特征值. 而当 $\zeta \in \mathbf{R}$ 时，

$$R' \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_-(\zeta) \\ r_+(\zeta)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\zeta x} \end{pmatrix},$$

故 $r'_+(\zeta) = r_+(\zeta)$，从而

$$b'(\zeta) = \frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} b(\zeta). \tag{1.226}$$

如果 $\zeta_k$ 是 $r_-(\zeta)$的零点，则由(1.223)式得 $\alpha'(\zeta_k) = \alpha(\zeta_k)$，故

$$C'_k = \alpha'(\zeta_k) \Big/ \frac{\mathrm{d}r'_-(\zeta_k)}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\zeta_k - \bar{\zeta}_0}{\zeta_k - \zeta_0} C_k. \tag{1.227}$$

在 $\zeta = \zeta_0$ 时，

$$\psi'_r(x, t, \zeta_0) = \frac{1}{1 + |\sigma|^2} \begin{pmatrix} |\sigma|^2 & -\bar{\sigma} \\ -\sigma & 1 \end{pmatrix} \psi_r(x, t, \zeta_0),$$

$$\psi'_l(x, t, \zeta_0) = \frac{1}{1 + |\sigma|^2} \begin{pmatrix} |\sigma|^2 & -\bar{\sigma} \\ -\sigma & 1 \end{pmatrix} \psi_l(x, t, \zeta_0),$$

$$\alpha'(\zeta_0) = \frac{\sigma L_1 \exp(\mathrm{i}\zeta_0 x) - L_2 \exp(\mathrm{i}\zeta_0 x)}{\sigma R_1 \exp(-\mathrm{i}\zeta_0 x) - R_2 \exp(-\mathrm{i}\zeta_0 x)} = \frac{1}{\mu}, \tag{1.228}$$

$$C'_0 = \alpha'(\zeta_0) \Big/ \frac{\mathrm{d}r'_-(\zeta_0)}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0}{\mu r_-(\zeta_0)}. \tag{1.229}$$

(2) $\zeta_0 = \zeta_j \in IP\sigma(\mathscr{L})$，$\mu \neq \alpha(\zeta_j)$，

这时

$$\sigma = \frac{R_2(\zeta_j)}{R_1(\zeta_j)} = \frac{L_2(\zeta_j)}{L_1(\zeta_j)},$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\sigma = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\sigma = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-\mathrm{i}\zeta I - S) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\zeta_0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\,\bar{\zeta}_0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(-\mathrm{i}\zeta I - S) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\,\bar{\zeta}_0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\zeta_0 \end{pmatrix}. \tag{1.230}$$

经 Darboux 变换后,Jost 解为

$$\psi_r'(x,t,\zeta) = \frac{1}{-\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\zeta_0}(-\mathrm{i}\zeta I - S)\psi_r(x,t,\zeta),$$

$$\psi_l'(x,t,\zeta) = \frac{1}{-\mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\zeta_0}(-\mathrm{i}\zeta I - S)\psi_l(x,t,\zeta). \tag{1.231}$$

从而当 $\zeta\in\mathbf{C}_+$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty} R' = \begin{pmatrix} \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_-(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

而当 $\zeta\in\mathbf{R}$ 时,

$$R' \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_-(\zeta) \\ r_+(\zeta)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\zeta x} \end{pmatrix},$$

所以

$$r_-'(\zeta) = \frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} r_-(\zeta) \quad (\zeta\in\mathbf{C}_+\cup\mathbf{R}),$$

$$r_+'(\zeta) = r_+(\zeta) \quad (\zeta\in\mathbf{R}), \tag{1.232}$$

而

$$b'(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} b(\zeta). \tag{1.233}$$

由(1.232)式知道,Darboux 变换消去了特征值 $\zeta_0(=\zeta_j)$.

当 $\zeta = \zeta_k(k\neq j)$ 时, $\psi_r' = \alpha(\zeta_k)\psi_l'$, 故

$$\alpha'(\zeta_k) = \alpha(\zeta_k), \quad C'_k = \alpha'(\zeta_k) \Big/ \frac{\mathrm{d}r'_-(\zeta_k)}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\zeta_k - \zeta_0}{\zeta_k - \bar{\zeta}_0} C_k.$$

证毕. ∎

这样,我们就给出了 $su(2)$ 约化情形时在 Darboux 变换下所有散射数据的变化公式. 从上面的讨论可以看出,一次 Darboux 变换会增加或减少孤立子数,但它不会影响连续谱. 鉴于 Darboux 变换有标准的代数算法,利用 Darboux 变换可将一般的反散射问题的求解转化为不含离散特征值的反散射问题的求解.

**注 1.17** 对于 KdV 方程,由于 Lax 对(1.203)式中的 $q = 1$ (或$-1$),它在无穷远处不趋向于零,因而上面的结论不能直接应用. 但是,KdV 方程的反散射理论实际上比 AKNS 系统要简单些[17],所以对 KdV 方程的成立与定理 1.11 类似的结果,在这里不再叙述[23].

# 第 2 章　1＋2 维可积系统

本章讨论 1＋2 维可积系统的 Darboux 变换. 我们从最简单的 KP 方程开始,进而讨论 1＋2 维 AKNS 系统及更一般系统的 Darboux 变换. 与 1＋1 维的 Darboux 阵不同的是,这里的Darboux变换是由微分算子(称为 Darboux 算子)给出的. 与上一章一样,本章构作 Darboux 算子的方法对于所讨论系统中的大量方程有普适性. 作为典型的例子,我们讨论具有化约的系统——DS Ⅱ 方程. 此外,本章还介绍由 Matveev 等人引入的积分算子形式的 Darboux 变换——二元 Darboux 变换,结合 Darboux 变换与二元 Darboux 变换方法可以得到 DS Ⅰ 方程的显式解.

## §2.1　KP 方程及其 Darboux 变换

1＋2 维可积系统是指具有变量$(x, y, t)$的可积系统,这里 $x$, $y$ 指空间变量,$t$ 指时间变量. 1＋2 维可积非线性偏微分方程的一个典型例子为 Kadomtsev-Petviashvili 方程(简称 KP 方程)

$$u_{xt} = (u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3\alpha^2 u_{yy}, \tag{2.1}$$

其中 $\alpha=\pm 1$ 或 $\pm\mathrm{i}$, $\alpha=\pm 1$ 时(2.1)式称为 KP Ⅰ 方程, $\alpha=\pm\mathrm{i}$ 时(2.1)式称为 KP Ⅱ 方程. KP 方程是 KdV 方程的自然的推广,它反映了二维水波的运动,最早是由 Kadomtsev 和 Petviashvili[56] 提出的. (2.1)式的另一形式是

$$v_{xt} = v_{xxxx} + 6v_x v_{xx} + 3\alpha^2 v_{yy} \tag{2.2}$$

($v$ 是满足 $v_x = u$ 的一个函数). KP 方程具有一个 Lax 对

$$\begin{cases}\phi_y = \alpha^{-1}\phi_{xx} + \alpha^{-1}u\phi, \\ \phi_t = 4\phi_{xxx} + 6u\phi_x + 3(\alpha v_y + u_x)\phi,\end{cases} \tag{2.3}$$

即(2.1)式是超定线性方程组(2.3)式的可积条件. 这就是说,先将(2.3)式的第一式关于 $t$ 微分,把 $\phi_t$ 用第二式代入,得出 $\phi_{yt}$ 的一个表达式;然后将(2.3)式的第二式关于 $y$ 微分,把 $\phi_y$ 用第一式代入,得出 $\phi_{ty}$ 的一个表达式;再令 $\phi_{yt}=\phi_{ty}$, 在 $\phi\neq 0$ 的情况下就得出(2.1)式. 这种运算较冗长,但很直接,请读者自己检验.

KP 方程的 Darboux 变换与 KdV 方程的 Darboux 变换非常相似,可具体构造如下:取 $h$ 为 Lax 对(2.3)式的一个解,而对(2.3)式的任一解 $\phi$,定义

$$\phi'=\phi_x-(h_x/h)\phi, \tag{2.4}$$

则利用 $\phi$, $h$ 满足 Lax 对(2.3)式这一事实,可验证 $\phi'$ 是方程组

$$\begin{cases}\phi'_y=\alpha^{-1}\phi'_{xx}+\alpha^{-1}u'\phi',\\ \phi'_t=4\phi'_{xxx}+6u'\phi'_x+3(\alpha v'_y+u'_x)\phi'\end{cases} \tag{2.5}$$

的解,其中

$$u'=u+2(h_x/h)_x,\quad v'=v+2h_x/h. \tag{2.6}$$

(2.5)式与(2.3)式相比较,仅是$(u,\ \phi)$换成了$(u',\ \phi')$,因此(2.6)式给出了 KP 方程的新的解 $u'$.

与 $1+1$ 维情形相似,如果初始解 $u$ 比较简单,可以显式地解出 Lax 对(2.3)式而得到 $h$,从而由(2.4)式得到 KP 方程的较复杂的解. 特别是,$u=0$ 是 KP 方程的平凡解. 如果取 $v=0$, 则(2.3)式成为

$$\begin{cases}\phi_y=\alpha^{-1}\phi_{xx},\\ \phi_t=4\phi_{xxx},\end{cases} \tag{2.7}$$

所以,对(2.7)式的任一解 $h$, $u'=2(h_x/h)_x$ 给出了 KP 方程的一个解. 当然,为了得到对所有的 $x$, $y$, $t$ 都有意义的解, 必须要求 $h\neq 0$.

**例 2.1** 对 $\alpha=1$,可取

$$h=\mathrm{e}^{\lambda x+\lambda^2 y+4\lambda^3 t}+1, \tag{2.8}$$

其中 $\lambda$ 为实常数,则可得到 KPⅠ方程的解

$$u'=\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}(\lambda x+\lambda^2 y+4\lambda^3 t)\right). \tag{2.9}$$

**例 2.2** 对 $\alpha=-\mathrm{i}$,令

$$h = e^{\lambda x + i\lambda^2 y + 4\lambda^3 t} + e^{-\bar{\lambda} x + i\bar{\lambda}^2 y - 4\bar{\lambda}^3 t}, \tag{2.10}$$

其中 $\lambda = a + bi$ 为复常数,则可得到 KP Ⅱ方程的解

$$u' = 2a^2 \operatorname{sech}^2(ax - 2aby + 4(a^3 - 3ab^2)t). \tag{2.11}$$

这两个解都具有平面行波形式,即具有 $u' = f(t + a_1 x + a_2 y)$ 的形式. 沿着平面 $t + a_1 x + a_2 y = \text{const}$, $u'$的数值不变. 对确定的 $t$, $u'$沿着 $(x, y)$平面上的某些直线(在 KP Ⅰ时为 $\lambda x + \lambda^2 y = \text{const}$; 在 KP Ⅱ时为 $ax - 2aby = \text{const}$) 为非零常数,而沿着其他直线均指数式地趋向于零,因而 $u'$不接近于 0 的点构成了无限长的带状区域 (1+1 维孤立子解不出现这种情况). 这种解往往称为“线状孤立子解”.

上面谈到的是单个 Darboux 变换$(u, \phi) \to (u', \phi')$. 如果已知 KP 方程的解 $u$,并已解出了 $u$ 所相应的 Lax 对而得到一族解 $\phi$,则取 $h$ 为特殊的解$\phi$(与前面所讨论的 1 + 1 维情形不同的是,这里不再存在谱参数,故任取一个 $h$ 即可), $u' = u + 2(\ln h)_{xx}$ 就是 KP 方程的解,且 $\phi' = \phi_x - (h_x/h)\phi$ 是 $u'$所相应的 Lax 对的解. 再取特殊的 $\phi'$作为 $h'$,则可得到 KP 方程的另一个解 $u'' = u' + 2(\ln h')_{xx}$ 以及 $u''$所相应的 Lax 对的解 $\phi'' = \phi'_x - (h'_x/h')\phi'$. 在这过程中,不需要再解微分方程,且可依次类推得到 KP 方程的一系列解.

这个求解过程(除了第一步之外)用代数运算和求导数这两种算法可以实现,因而可用符号运算来实现. 但只有在各次选 $h$, $h'$, …时不出现零点,才能得出无奇性的整体解,即对所有 $t$, $x$, $y$ 都有意义的解. 和以前一样,可把逐次求解的过程表示为

$$(u, \phi) \longrightarrow (u', \phi') \longrightarrow (u'', \phi'') \longrightarrow \cdots.$$

如果将(2.3)式中第二式的右端关于 $x$ 的 3 阶微分算子换成一个关于 $x$ 的任意阶微分算子,就可得到 KP 梯队

$$\begin{cases} \phi_y = \alpha^{-1}\phi_{xx} + \alpha^{-1}u\phi, \\ \phi_t = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} v_{n-j}\partial^j\phi \qquad (\partial = \partial/\partial x). \end{cases} \tag{2.12}$$

作(2.12)式的可积条件,令 $\phi$ 及其关于 $x$ 的各阶导数的系数为 0,可以得到关于 $u$ 和 $v_j$ 的偏微分方程组:

$$2v_{j+1,x}=\alpha v_{j,y}-v_{j,xx}+\sum_{k=0}^{j-1}C_{n-k}^{n-j}v_k\partial^{j-k}u, \tag{2.13}$$

$$u_t=\alpha v_{n,y}-v_{n,xx}+\sum_{k=0}^{n-1}v_k\partial^{n-k}u. \tag{2.14}$$

在(2.13)式中解 $v_{j+1}$ 需要作逐次积分. 与 KdV 梯队等 1＋1 维系统不同的是,这里 $v_j$ 不能表示成 $u$ 的微分多项式,故如果将(2.13)式与(2.14)式中的$(u, v_1, \cdots, v_n)$作为未知函数,就可得到一个"广义 KP 方程组". 对于这个方程组,前面讨论的 Darboux 变换(2.4)式、(2.6)式都是有效的. 在一些具体问题中,$(v_1, \cdots, v_n, u)$之间会有一定的关系,称为约化. 这时就需要具体选择 $h$,使得 $v_1, \cdots, v_n, u$ 之间的关系在 Darboux 变换后仍然成立. 这往往是一个困难的问题,现在还缺乏一般性的方法,只能对若干个别情形作出特殊的、带有一定技巧性的处理.

## §2.2 1＋2 维 AKNS 系统与 DS 方程

1＋2 维 AKNS 系统具有如下的形式:

$$\begin{cases}\Phi_y=J\Phi_x+P\Phi,\\ \Phi_t=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}V_{n-j}\partial^j\Phi,\end{cases} \tag{2.15}$$

式中 $J$ 是 $N\times N$ 常值对角阵,它的对角元互不相等,$P(x, y, t)$是 $N\times N$ 矩阵,且对角元全为 0, $V_j(x, y, t)$也是 $N\times N$ 矩阵, $\partial=\partial/\partial x$, 且假定 $\Phi$ 是非异阵.

由(2.15)式的可积条件可以得出

$$[J, V_{j+1}^{\mathrm{off}}]=V_{j,y}^{\mathrm{off}}-JV_{j,x}^{\mathrm{off}}-[P, V_j]^{\mathrm{off}}+\sum_{k=0}^{j-1}C_{n-k}^{n-j}(V_k\partial^{j-k}P)^{\mathrm{off}}, \tag{2.16}$$

$$V_{j,y}^{\mathrm{diag}}-JV_{j,x}^{\mathrm{diag}}=[P, V_j^{\mathrm{off}}]^{\mathrm{diag}}-\sum_{k=0}^{j-1}C_{n-k}^{n-j}(V_k\partial^{j-k}P)^{\mathrm{diag}}, \tag{2.17}$$

$$P_t=V_{n,y}^{\mathrm{off}}-JV_{n,x}^{\mathrm{off}}-[P, V_n]^{\mathrm{off}}+\sum_{k=0}^{n-1}(V_k\partial^{n-k}P)^{\mathrm{off}}. \tag{2.18}$$

式中上标 diag 和 off 分别表示一个矩阵的对角和非对角部分.

与 1+1 维情形不同的是,这里的 $V_j$ 通常不是 $P$ 的微分多项式. 可以将(2.17)式、(2.18)式看作关于 $P$, $V_j^{\text{diag}}(j = 0, 1, \cdots, n)$ 的偏微分方程组(其中 $V_j^{\text{off}}(j = 1, \cdots, n)$ 由(2.16)式所决定),(2.15)式是这个方程组的 Lax 对.

1 + 2 维 AKNS 系统所给出的一个典型的方程是 Davey-Stewartson 方程(简称 DS 方程),它是非线性 Schrödinger 方程在 1 + 2 维的自然推广,导出如下:

在(2.15)式中,取 $N = 2$, $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
&J = \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}0 & u\\ -\varepsilon\,\bar{u} & 0\end{pmatrix},\\
&\alpha = \pm 1 \text{ 或 } \pm \mathrm{i},\ \varepsilon = \pm 1,\\
&V_0 = \frac{2\mathrm{i}}{\alpha}J,\quad V_1 = \frac{2\mathrm{i}}{\alpha}P,\\
&V_2 = \frac{\mathrm{i}}{\alpha}\begin{pmatrix}w_1 & u_x + u_y/\alpha\\ -\varepsilon\,\bar{u}_x + \varepsilon\,\bar{u}_y/\alpha & w_2\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

式中 $u$, $w_1$, $w_2$ 都是复值函数,$\bar{u}$是 $u$ 的复共轭. 这时(2.15)式成为

$$
\begin{aligned}
\Phi_y &= \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Phi_x + \begin{pmatrix}0 & u\\ -\varepsilon\,\bar{u} & 0\end{pmatrix}\Phi,\\
\Phi_t &= 2\mathrm{i}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Phi_{xx} + \frac{2\mathrm{i}}{\alpha}\begin{pmatrix}0 & u\\ -\varepsilon\,\bar{u} & 0\end{pmatrix}\Phi_x\\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{\alpha}\begin{pmatrix}w_1 & u_x + u_y/\alpha\\ -\varepsilon\,\bar{u}_x + \varepsilon\,\bar{u}_y/\alpha & w_2\end{pmatrix}\Phi,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

(2.17)式、(2.18)式给出方程组

$$
\begin{cases}
\mathrm{i}u_t = -u_{xx} - \dfrac{1}{\alpha^2}u_{yy} - \dfrac{1}{\alpha}u(w_1 - w_2),\\
w_{1,y} - \alpha w_{1,x} = \varepsilon(|u|^2)_x + \dfrac{\varepsilon}{\alpha}(|u|^2)_y,\\
w_{2,y} + \alpha w_{2,x} = \varepsilon(|u|^2)_x - \dfrac{\varepsilon}{\alpha}(|u|^2)_y,
\end{cases}
\tag{2.21}
$$

且 $\overline{w_2 - w_1} = \alpha^2(w_2 - w_1)$. 若记

$$v = -\varepsilon \mid u \mid^2 + \frac{\alpha}{2}(\omega_1 - \omega_2), \tag{2.22}$$

则方程组(2.21)式成为

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t = -u_{xx} - \dfrac{1}{\alpha^2}u_{yy} - \dfrac{2\varepsilon}{\alpha^2} \mid u \mid^2 u - \dfrac{2}{\alpha^2}uv, \\ v_{yy} - \alpha^2 v_{xx} - 2\alpha^2\varepsilon(\mid u \mid^2)_{xx} = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

(2.23)式中 $u$ 是复的未知函数, $v$ 是实的未知函数. 若 $\varepsilon = 1$, $\alpha = \pm 1$, 则(2.23)式称为 DS Ⅰ 方程;若 $\varepsilon = 1$, $\alpha = \pm \mathrm{i}$, 则(2.23)式称为DS Ⅱ 方程. 它们分别描述有限深度的水中长波和短波的运动[15].

## § 2.3 Darboux 变换

### 2.3.1 一般的 Lax 对

与 KP 方程类似,我们也希望作出 DS 方程或较一般的 AKNS 系统的 Darboux 变换. 事实上,这可先行讨论如下更一般的无约化 Lax 对的 Darboux 变换,然后再讨论相应的约化问题.

考虑如下的 Lax 对

$$\begin{cases} \Phi_y = U(x, y, t, \partial)\Phi, \\ \Phi_t = V(x, y, t, \partial)\Phi, \end{cases} \tag{2.24}$$

其中

$$\begin{aligned} U(x, y, t, \partial) &= \sum_{j=0}^{m} U_{m-j}(x, y, t)\partial^j, \\ V(x, y, t, \partial) &= \sum_{j=0}^{n} V_{n-j}(x, y, t)\partial^j \end{aligned} \tag{2.25}$$

是关于 $x$ 的微分算子,其系数 $U_j$ 与 $V_j$ 取值于 $N \times N$ 矩阵. 下面为简单起见,常记 $U(x, y, t, \partial) = U(\partial)$, $V(x, y, t, \partial) = V(\partial)$.

我们称(2.24)式为可积的,如果

$$U_t(\partial) - V_y(\partial) + [U(\partial), V(\partial)] = 0 \tag{2.26}$$

成立. 这是关于 $U$, $V$ 中$\partial$的各次系数的偏微分方程组,它是由对(2.24)式的第一式关于 $t$ 求导,第二式关于 $x$ 求导,再令其相等而得到的. 这是 $1+1$ 维零曲率方程(1.58)式的推广.

**注 2.1**　偏微分方程组解的存在性和唯一性是一个非常复杂的问题,以 $t = t_0$, $y = y_0$, $\Phi(t_0, x, y_0) = \Phi_0(x)$ 为初值,(2.24)式的第一方程组的局部解(在 $t = t_0$, $y = y_0$, $x = x_0$ 的一个邻域中的解)也未必能够存在,但是,如果(2.24)式中的每个方程的初值问题都是局部唯一可解的,且分别关于参数 $y$, $t$ 有足够的可微性,又 $U(\partial)$, $V(\partial)$满足(2.26)式,则方程组(2.24)式的初值问题就局部可解. 事实上,对于给定的初值 $(x_0, y_0, t_0, \Phi_0(x))$,先在 $t = t_0$ 时解(2.24)式的第一式得到 $\Phi_1(x, y)$,使之满足初值 $\Phi_1(x, y_0) = \Phi_0(x)$;然后以 $\Phi_1(x, y)$作为初值,在固定 $y$ 时解(2.24)式的第二式,得到 $\Phi(x, y, t)$,使之满足 $\Phi(x, y, t_0) = \Phi_1(x, y)$. 利用(2.26)式及(2.24)式的第二式,得

$$(\Phi_y - U(\partial)\Phi)_t = V(\partial)(\Phi_y - U(\partial)\Phi),$$

由 $t = t_0$ 时的初值及上述方程解的唯一性可知道, $\Phi_y = U(\partial)\Phi$ 在 $(x_0, y_0, t_0)$附近恒成立.

无论初值问题解的唯一可解性是否成立,我们总是称(2.26)式为(2.24)式的可积条件,它是$U(\partial)$和 $V(\partial)$的系数的一个非线性偏微分方程组,而(2.24)式称为这个方程组的 Lax 对.

### 2.3.2　一阶 Darboux 变换

与 $1+1$ 维类似,对非线性偏微分方程(2.26)式及其 Lax 对(2.24)式,可以定义其 Darboux 算子.

**定义 2.1**　关于 $x$ 的微分算子 $D(x, y, t, \partial)$称为 Darboux 算子,如果存在关于 $x$ 的微分算子 $U'(\partial)$, $V'(\partial)$,使得方程(2.24)式通过变换 $\Phi' = D(\partial)\Phi$ 成为

$$\begin{cases} \Phi'_y = U'(\partial)\Phi', \\ \Phi'_t = V'(\partial)\Phi'. \end{cases} \tag{2.27}$$

由 $D(\partial)$导出的变换 $(\Phi, U(\partial), V(\partial)) \to (\Phi', U'(\partial), V'(\partial))$ 称为Dar-

boux变换.

将 $\Phi' = D\Phi$ 代入(2.27)式,可得

$$D_y(\partial) = U'(\partial)D(\partial) - D(\partial)U(\partial),$$
$$D_t(\partial) = V'(\partial)D(\partial) - D(\partial)V(\partial), \tag{2.28}$$

及

$$U'_t(\partial) - V'_y(\partial) + [U'(\partial), V'(\partial)] = 0. \tag{2.29}$$

(2.28)式也是 $D(\partial)$成为 Darboux 算子的充要条件. 于是,如果$(U(\partial), V(\partial))$是(2.26)式的解,则$(U'(\partial), V'(\partial))$也是(2.26)式的解,即上述 Darboux 变换给出了(2.26)式的一个新解,但主要的问题是如何作出(2.28)式的解 $D$.

从现在开始,讨论最基本的一阶 Darboux 算子,即形如 $D(x, y, t, \partial) = \partial - S(x, y, t)$ 的 Darboux 算子,以后再讨论高阶 Darboux 算子.

下面先讨论一阶 Darboux 算子 $\partial - S$ 中 $S$ 满足的方程,进而讨论 $S$ 的一般构造.

对一个已给矩阵 $M(x)$,定义 $M^{(0)} = I$, 进而逐次定义

$$M^{(j+1)} = M_x^{(j)} + M^{(j)}M, \tag{2.30}$$

则对方程 $\Phi_x = M\Phi$ 的任意解$\Phi$,有 $\partial^j\Phi = M^{(j)}\Phi$.

又对微分算子

$$U(\partial) = \sum_{j=0}^{k} U_{k-j}\partial^j, \quad V(\partial) = \sum_{j=0}^{k} V_{k-j}\partial^j$$

和 $N \times N$ 矩阵 $S$,我们定义

$$U(S) = \sum_{j=0}^{k} U_{k-j}S^{(j)}, \quad V(S) = \sum_{j=0}^{k} V_{k-j}S^{(j)}. \tag{2.31}$$

对于满足 $\Phi_x = S\Phi$ 的阵$\Phi$,有$U(\partial)\Phi = U(S)\Phi$和$V(\partial)\Phi = V(S)\Phi$成立. 这里提醒一下,$U(S)$, $V(S)$并不是将$U(\partial)$, $V(\partial)$中的$\partial$用 $S$ 替换而成,而是将$\partial^j$ 用 $S^{(j)}$替换而成.

**定理 2.1** $\partial - S$ 是(2.24)式的 Darboux 算子的充要条件是:$S$ 满足

$$S_y + [S, U(S)] = (U(S))_x,$$
$$S_t + [S, V(S)] = (V(S))_x. \tag{2.32}$$

**证明**　先假设 $\partial - S$ 是(2.24)式的 Darboux 算子，(2.28)式的第一式即为

$$S_y - (\partial - S)U(\partial) + U'(\partial)(\partial - S) = 0, \tag{2.33}$$

取 $\Psi_x = S\Psi$ 的基本解 $\Psi$(这时 $y$, $t$ 作为参数)，则有

$$S_y\Psi = (\partial - S)U(S)\Psi = (U(S))_x\Psi - [S, U(S)]\Psi,$$

由此即得(2.32)式的第一式，第二式可同样证明. 于是(2.32)式的必要性得到证明.

充分性的证明如下：设 $S$ 是(2.32)式的解，定义

$$U'(\partial) = \sum_{j=0}^{m} U'_{m-j}\partial^j, \tag{2.34}$$

其中$U'_j$由

$$\begin{aligned} &U'_0 = U_0, \\ &U'_{j+1} = U_{j+1} + U_{j,x} - SU_j + \sum_{k=0}^{j} C_{m-k}^{m-j} U'_k \partial^{j-k} S \end{aligned} \tag{2.35}$$

逐次定义，则

$$S_y - (\partial - S)U(\partial) + U'(\partial)(\partial - S)$$

不含关于 $x$ 的微分$\partial$的各次项，也就是说，它是 $x$, $y$, $t$ 的矩阵值函数. 另一方面，由(2.32)式得知，对 $\Psi_x = S\Psi$ 的基本解 $\Psi$，有

$$(S_y - (\partial - S)U(\partial) + U'(\partial)(\partial - S))\Psi = 0$$

成立. 所以，作为一个矩阵，

$$S_y - (\partial - S)U(\partial) + U'(\partial)(\partial - S) = 0. \tag{2.36}$$

这就是说，$\partial - S$ 满足(2.28)式的第一式，(2.28)式的第二式也可同样证明. 因此 $\partial - S$ 是(2.24)式的 Darboux 算子. 证毕. ■

**定理 2.2**[86]、[88]　$\partial - S$ 是(2.24)式的 Darboux 算子的充要条件是存在(2.24)式的 $N \times N$ 非退化矩阵解 $H$，使 $S = H_xH^{-1}$.

**证明**　为证明充分性，只需验证这里给出的 $S$ 满足(2.32)式. 利用(2.24)式，得

$$\begin{aligned} S_y &= H_{xy}H^{-1} - SH_yH^{-1} \\ &= (U(S)H)_xH^{-1} - SU(S) \\ &= [U(S), S] + (U(S))_x, \end{aligned}$$

此即(2.32)式的第一式,它的第二式同样可证明.

为证明必要性,假设 $S$ 满足(2.32)式,再看方程组

$$\begin{cases} H_x = SH, \\ H_y = U(\partial)H, \\ H_t = V(\partial)H, \end{cases} \tag{2.37}$$

是否有解.显然,(2.37)式等价于

$$\begin{cases} H_x = SH, \\ H_y = U(S)H, \\ H_t = V(S)H, \end{cases} \tag{2.38}$$

于是,只需验证(2.38)式的可积条件.

取 $\Psi_x = S\Psi$ 的基本解 $\Psi$,由(2.33)式,

$$(\Psi_y - U(\partial)\Psi)_x = (S\Psi)_y - \partial U(\partial)\Psi = S(\Psi_y - U(\partial)\Psi),$$

于是有

$$\begin{aligned} &(V_y(\partial) + V(\partial)U(\partial))\Psi \\ &= (V(\partial)\Psi)_y - V(\partial)(\Psi_y - U(\partial)\Psi) \\ &= (V(S)\Psi)_y - V(S)(\Psi_y - U(S)\Psi) \\ &= V(S)_y\Psi + V(S)U(S)\Psi. \end{aligned}$$

类似地,

$$(U_t(\partial) + U(\partial)V(\partial))\Psi = U(S)_t\Psi + U(S)V(S)\Psi.$$

因为 $\det \Psi \neq 0$, 可积条件(2.26)式给出

$$U(S)_t - V(S)_y + [U(S), V(S)] = 0, \tag{2.39}$$

所以在(2.38)式的可积条件中 $H_{yt} = H_{ty}$ 成立.

定理 2.1 则给出另外两个可积条件 $H_{xy} = H_{yx}$ 和 $H_{xt} = H_{tx}$. 于是知道(2.38)式是可积的.对于 $(t, x, y) = (t_0, x_0, y_0)$ 时的初始条件 $H = H_0$, (2.38)式存在解 $H$,如 $H_0$ 非退化,则至少在$(t_0, x_0, y_0)$的一个邻域中 $H$ 非退化,即(2.38)式存在非退化矩阵解 $H$.这时, $S = H_xH^{-1}$.
证毕. ∎

此定理说明了在无约化情形,任何一个形如 $\partial - S$ 的 Darboux 算子均可通过 Lax 对的解直接显式作出. 在 Lax 对有非退化的 $N\times N$ 矩阵解时,Darboux 变换就能存在,在 Darboux 变换下,(2.35)式即为$U'_j$的表示式,而 $V'_j$ 的表示式也类似.

对 AKNS 系统(2.15)式,经 Darboux 算子 $\partial - S$ 作用后,应有

$$(\partial - S)(J\partial + P) - S_x = (J\partial + P')(\partial - S),$$

上式中两端$\partial^2$ 的系数相等,而$\partial$的系数则给出新解

$$P' = P + [J, S]. \tag{2.40}$$

这样,就构作出 Darboux 变换

$$(U, V, \Phi) \longrightarrow (U', V', \Phi'),$$

并可继续进行得到解的无限序列,每一步的算法都由同一的代数运算和微分运算完成.

对具体问题,$U$, $V$ 的各个元素之间往往有一定的约束关系,这时,上述定理中的 $H$ 也需满足一定的条件,使 $U'$, $V'$满足与 $U$, $V$ 所满足的相同的约束关系, 以得到非线性方程到自身的解的变换.

**注 2.2**　对 KP 方程,这里构造 Darboux 变换的方法与 § 2.1 给出的完全相同. 但对 DS 方程,由于要考虑矩阵 $P$ 的各元素之间的约束关系,故构造 Darboux 变换的问题比较复杂. 对它的讨论留到 § 2.4 中进行.

与前面类似,也可将多个一阶 Darboux 变换复合成为高阶 Darboux 变换.

### 2.3.3　高阶 Darboux 变换与可换性定理

本节中讨论一个高阶 Darboux 变换,即一个形如

$$D(\partial) = \sum_{j=0}^{r} D_{r-j}\partial^j, \quad D_0 = I \tag{2.41}$$

的微分算子,使得

$$\begin{aligned} D_y(\partial) &= U'(\partial)D(\partial) - D(\partial)U(\partial), \\ D_t(\partial) &= V'(\partial)D(\partial) - D(\partial)V(\partial) \end{aligned} \tag{2.42}$$

成立,这里 $U'(\partial)$, $V'(\partial)$是关于 $x$ 的微分算子.

为简便起见,在此只叙述 2 阶的 Darboux 算子.在 $r>2$ 的情形,同样可以显式地写出相应的 $r$ 阶 Darboux 算子,方法是完全一样的,只是形式上复杂一些而已.

**定理 2.3** 给定两个满足(2.24)式的 $N\times N$ 非退化矩阵解 $H_1$ 和 $H_2$,记 $F$ 为分块矩阵

$$\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \partial H_1 & \partial H_2 \end{pmatrix},$$

如果 $\det F\neq 0$, 则

(1) 存在唯一的 2 阶微分算子

$$D(H_1,\ H_2,\ \partial)=\partial^2+D_1\partial+D_2, \tag{2.43}$$

满足

$$D(H_1,\ H_2,\ \partial)H_i=0\ (i=1,\ 2). \tag{2.44}$$

并且它是一个 Darboux 算子.

(2) 可换性定理

$$D(H_1,\ H_2,\ \partial)=D(H_2,\ H_1,\ \partial) \tag{2.45}$$

成立.

(3) 有分解

$$D(H_1,\ H_2,\ \partial)=D(D(H_1,\ \partial)H_2,\ \partial)D(H_1,\ \partial). \tag{2.46}$$

**证明** 由于 $\det F\neq 0$, 关于 $D_1$, $D_2$ 的线性代数方程组

$$\begin{cases} D_1\partial H_1+D_2H_1=-\partial^2H_1, \\ D_1\partial H_2+D_2H_2=-\partial^2H_2 \end{cases} \tag{2.47}$$

存在唯一解,由此即可唯一决定 $D(\partial)$,它满足(2.44)式.由于(2.47)式关于 $H_1$, $H_2$ 是对称的,(2)自然成立.

根据 $D(D(H_1,\ \partial)H_2,\ \partial)$与 $D(H_1,\ \partial)$的定义,有

$$\begin{aligned} &D(D(H_1,\ \partial)H_2,\ \partial)D(H_1,\ \partial)H_1=0, \\ &D(D(H_1,\ \partial)H_2,\ \partial)D(H_1,\ \partial)H_2=0, \end{aligned} \tag{2.48}$$

所以(3)成立.由于(3),$D(H_1,\ H_2,\ \partial)$是两个 Darboux 算子的复合,因而

也是 Darboux 算子. 定理证毕. ∎

与(1.95)式类似,这里的可换性定理也可以用下图表示:

$$\begin{array}{ccc}
(U,V,\Phi) & \xrightarrow{H_1} & (U^{(1)},V^{(1)},\Phi^{(1)}) \\
\Big\downarrow H_2 & & \Big\downarrow H_2 \\
 & & (U^{(1,2)},V^{(1,2)},\Phi^{(1,2)}) \\
(U^{(2)},V^{(2)},\Phi^{(2)}) & \xrightarrow{H_1} & \| \\
 & & (U^{(2,1)},V^{(2,1)},\Phi^{(2,1)})
\end{array} \tag{2.49}$$

**例 2.3** 对 KP 方程,可以得出经过高阶 Darboux 变换后 $u$ 的变换的显式表示式. 这时, $N=1$. 记 $H_i=h_i$. 设 Darboux 算子为

$$\sum_{j=0}^{r} D_{r-j}\partial^j,$$

由定理 2.3 的(1),有

$$\sum_{j=0}^{r-1} D_{r-j}\partial^j h_i=-\partial^r h_i,$$

即

$$(D_r,\cdots,D_1)F_r=-(\partial^r h_1,\cdots,\partial^r h_r).$$

解此线性代数方程组得

$$D_1=-\det\begin{pmatrix} h_1 & \partial h_1 & \cdots & \partial^{r-2}h_1 & \partial^r h_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_r & \partial h_r & \cdots & \partial^{r-2}h_r & \partial^r h_r \end{pmatrix}$$

$$\times\left[\det\begin{pmatrix} h_1 & \partial h_1 & \cdots & \partial^{r-2}h_1 & \partial^{r-1} h_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_r & \partial h_r & \cdots & \partial^{r-2}h_r & \partial^{r-1} h_r \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$=-(\ln \det F_r)_x.$$

所以对 KP 方程,解的变换为

$$u' = u - 2D_{1,x} = u + 2(\ln \det F_r)_{xx}. \tag{2.50}$$

由此可得到很多具体解[63, 67].

## §2.4 DS 方程的 Darboux 变换与二元 Darboux 变换

### 2.4.1 DSⅡ方程的 Darboux 变换[86]

在§2.2中我们已介绍了DSⅠ和DSⅡ方程(2.23)及其Lax对(2.20)式.由于DSⅠ方程与DSⅡ方程的约化方式不同,它们的求解方法也有很大差别.首先看DSⅡ方程,即 $\varepsilon = 1$, $\alpha = \mathrm{i}$ 的情形.在这里,所求的特解还要有进一步的约化,即 $w_2 = \overline{w}_1$, 此时 $v = -|u|^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}(w_1 - \overline{w}_1)$, 从而 $J$, $P$, $V_j$ 为

$$J = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\overline{u} & 0 \end{pmatrix},$$
$$V_0 = 2J,\ V_1 = 2P,\ V_2 = \begin{pmatrix} w_1 & u_x - \mathrm{i}u_y \\ -\overline{u}_x - \mathrm{i}\,\overline{u}_y & \overline{w}_1 \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

$J$, $P$, $V_j$ 具有性质

$$\overline{J} = \sigma J \sigma^{-1}, \quad \overline{P} = \sigma P \sigma^{-1}, \quad \overline{V}_j = \sigma V_j \sigma^{-1} \quad (j = 0, 1, 2), \tag{2.52}$$

这里

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

$\overline{P}$ 表示 $P$ 中所有元素取复共轭所得的矩阵.现在方程组(2.23)式成为

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\,u_t = -u_{xx} + u_{yy} + 2|u|^2 u + 2uv, \\ &v_{xx} + v_{yy} + 2(|u|^2)_{xx} = 0, \end{aligned} \tag{2.54}$$

它的 Lax 对是

$$\Phi_y = \mathrm{i}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Phi_x + \begin{pmatrix}0 & u\\ -\bar{u} & 0\end{pmatrix}\Phi,$$

$$\Phi_t = 2\mathrm{i}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Phi_{xx} + 2\begin{pmatrix}0 & u\\ -\bar{u} & 0\end{pmatrix}\Phi_x \tag{2.55}$$

$$+ \begin{pmatrix}w_1 & u_x - \mathrm{i}u_y\\ -\bar{u}_x - \mathrm{i}\,\bar{u}_y & \bar{w}_1\end{pmatrix}\Phi,$$

而

$$v = -|u|^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}(w_1 - \bar{w}_1). \tag{2.56}$$

(2.55)的 Darboux 算子可构造如下：

如果$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$是(2.55)式的解，则可直接验证$\begin{pmatrix}-\bar{\eta}\\ \bar{\xi}\end{pmatrix}$也是它的解，从而可取

$$H = \begin{pmatrix}\xi & -\bar{\eta}\\ \eta & \bar{\xi}\end{pmatrix}, \tag{2.57}$$

$$S = H_x H^{-1} = \frac{1}{|\xi|^2 + |\eta|^2}\begin{pmatrix}\bar{\xi}\xi_x + \eta\bar{\eta}_x & \bar{\eta}\,\xi_x - \xi\bar{\eta}_x\\ \bar{\xi}\eta_x - \eta\bar{\xi}_x & \xi\bar{\xi}_x + \bar{\eta}\eta_x\end{pmatrix}. \tag{2.58}$$

由于 $H$ 满足 $\overline{H} = \sigma H\sigma^{-1}$，$S$ 也满足 $\overline{S} = \sigma S\sigma^{-1}$. 由

$$U'(\partial)(\partial - S) = (\partial - S)U(\partial) - S_y,$$

$$V'(\partial)(\partial - S) = (\partial - S)V(\partial) - S_t,$$

得

$$\overline{U}' = \sigma U'\sigma^{-1},$$
$$\overline{V}' = \sigma V'\sigma^{-1}. \tag{2.59}$$

于是 Darboux 变换保持(2.52)式的约化不变.

经过 Darboux 算子 $\partial - S$ 的作用，

$$P' = P + [J, S],$$
$$V_2' = V_2 + V_{1,x} + 2V_0 S_x + [V_0, S]S + [V_1, S], \tag{2.60}$$

从而得 DS Ⅱ方程的新解为

$$u' = u + 2iS_{12} = u + 2i\frac{\bar{\eta}\xi_x - \xi\bar{\eta}_x}{|\xi|^2 + |\eta|^2},\tag{2.61}$$

$$v' = v - 2(\text{Re}\, S_{11})_x = v - (\ln(|\xi|^2 + |\eta|^2))_{xx}.$$

**例 2.4** 如果取初始解 $u=0$，则可取 $v=0$ $(w_1=0)$，$\xi=\xi(x+\mathrm{i}y, t)$，$\eta=\eta(x-\mathrm{i}y, t)$，使之满足 $\xi_t = 2\mathrm{i}\,\xi_{xx}$，$\eta_t = -2\mathrm{i}\,\eta_{xx}$. 对于这样确定的 $\xi$ 与 $\eta$，(2.61) 式给出的 $(u, v)$ 都是 DS Ⅱ 方程的解. 特别是，令 $\xi = \mathrm{e}^{\alpha x+\mathrm{i}\alpha y+2\mathrm{i}\alpha^2 t}$，$\eta = \mathrm{e}^{\bar{\beta}x-\mathrm{i}\bar{\beta}y-2\mathrm{i}\bar{\beta}^2 t}$，则可得

$$u = \frac{2\mathrm{i}(\alpha-\beta)\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)x+\mathrm{i}(\alpha+\beta)y+2\mathrm{i}(\alpha^2+\beta^2)t}}{\mathrm{e}^{2\text{Re}\alpha x-2\text{Im}\alpha y-2\text{Im}(\alpha^2)t}+\mathrm{e}^{2\text{Re}\beta x-2\text{Im}\beta y-2\text{Im}(\beta^2)t}},$$

$$v = -\frac{4(\text{Re}\alpha-\text{Re}\beta)^2\mathrm{e}^{2\text{Re}(\alpha+\beta)x-2\text{Im}(\alpha+\beta)y-2\text{Im}(\alpha^2+\beta^2)t}}{(\mathrm{e}^{2\text{Re}\alpha x-2\text{Im}\alpha y-2\text{Im}(\alpha^2)t}+\mathrm{e}^{2\text{Re}\beta x-2\text{Im}\beta y-2\text{Im}(\beta^2)t})^2}.$$

当 $t=$ 常数时，沿直线 $x\text{Re}(\beta-\alpha)-y\text{Im}(\beta-\alpha)=\text{const}$ 解 $u$ 为常值，而沿其他斜率的直线 $u$ 均渐近于零. 由于它并不在任意方向都渐近于零，所以我们仍将其归于线状孤立子解.

进一步作 Darboux 变换，可得到线状多孤立子解，它在有限个方向以外的所有方向上渐近于零.

图 2.1～图 2.4 给出的是线状单孤立子解与线状多孤立子解的示意图，其中 $\alpha_1 = 3+2\mathrm{i}$，$\beta_1 = 1+\mathrm{i}$，$\alpha_2 = \mathrm{i}$，$\beta_2 = (2+\mathrm{i})/4$. (单孤立子解取参数 $(\alpha_1, \beta_1)$.)

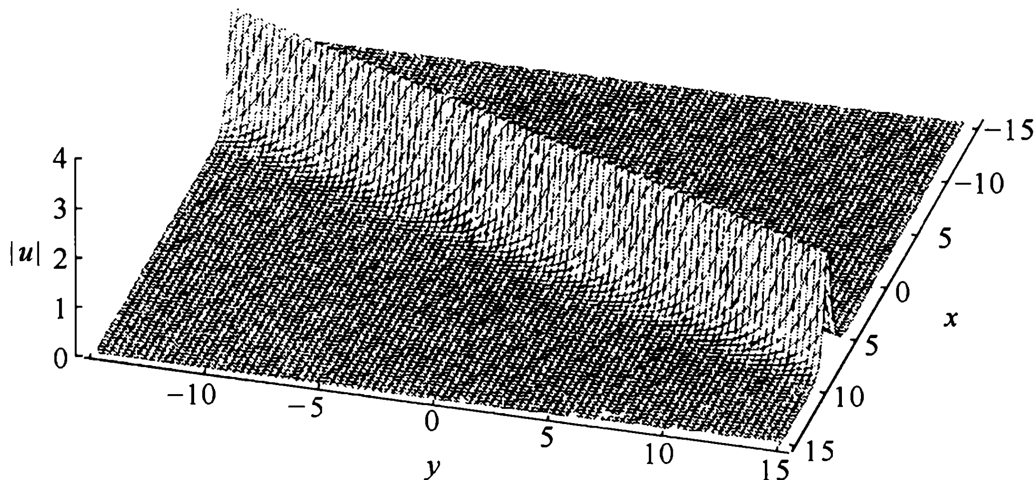



**图 2.1 线状单孤立子解，$t=0$**

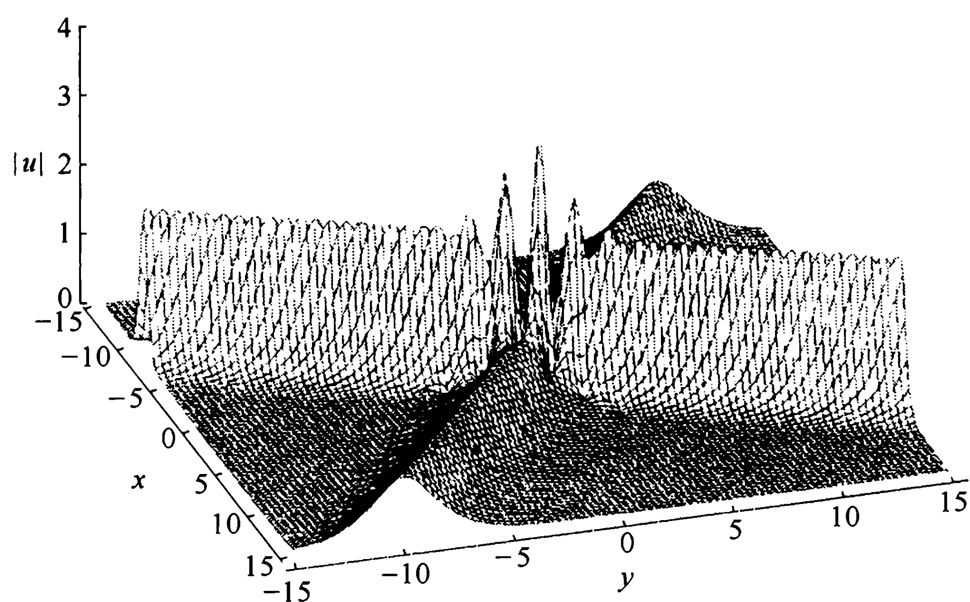



图 2.2 线状双孤立子解，$t=0$

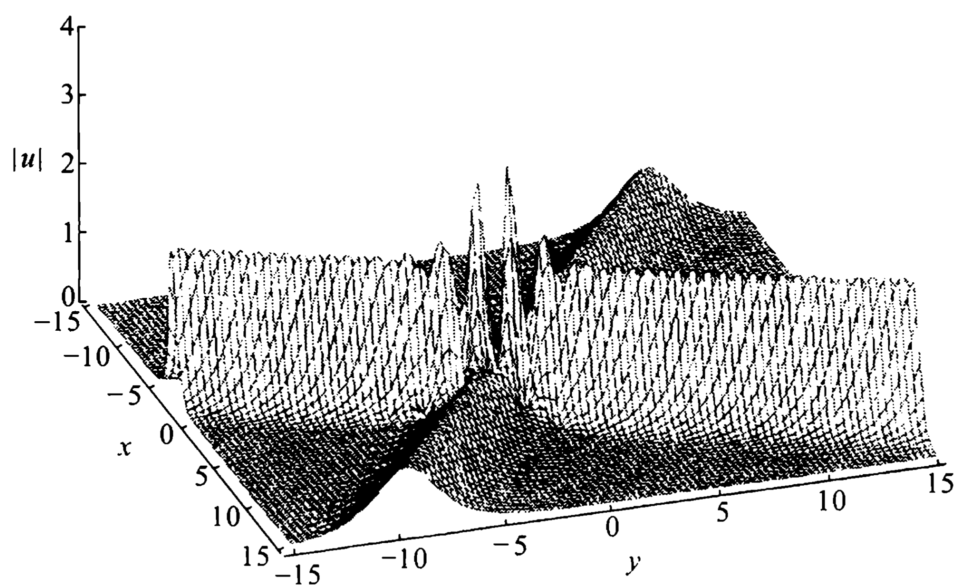



图 2.3 线状双孤立子解，$t=0.5$

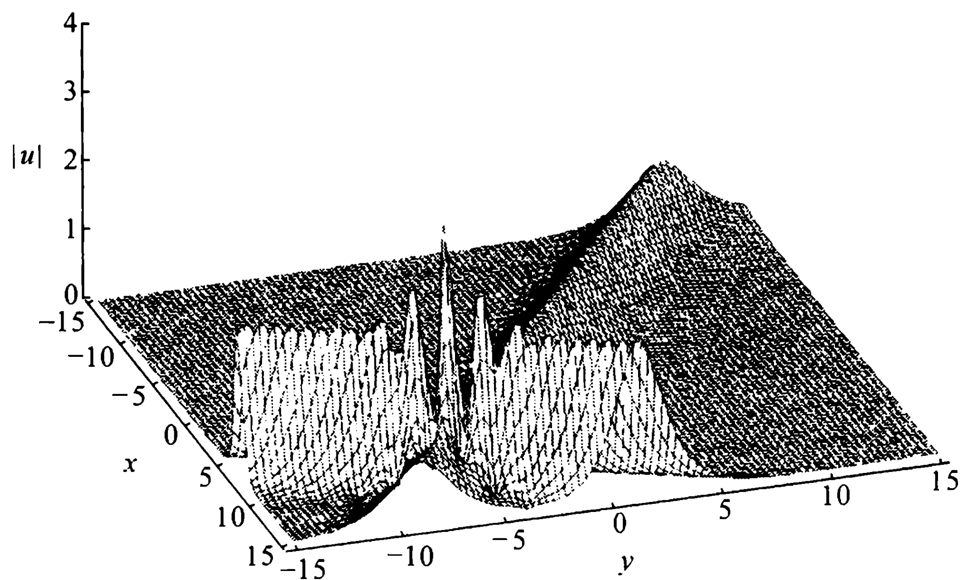



图 2.4 线状双孤立子解，$t=1$

**注 2.3** 与上一节的一般方式相比较，对 DS Ⅱ 方程构作 Darboux 变换的关键是取到形如(2.57)式的 $H$. 虽然此方法对 DS Ⅱ 方程是非常成功的，但对 DS Ⅰ 方程，还需要另想办法.

### 2.4.2 DS Ⅰ 方程的 Darboux 变换与二元 Darboux 变换[63]

在 $\varepsilon = 1$, $\alpha = 1$ 时，发展方程 DS Ⅰ 及其 Lax 对分别为

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\, u_t + u_{xx} + u_{yy} + 2 |u|^2 u + 2uv = 0, \\ &v_{xx} - v_{yy} + 2(|u|^2)_{xx} = 0, \end{aligned} \tag{2.62}$$

及

$$\begin{aligned} \Phi_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi_x + \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix} \Phi, \\ \Phi_t &= 2\mathrm{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi_{xx} + 2\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix} \Phi_x \\ &\quad + \mathrm{i} \begin{pmatrix} w_1 & u_x + u_y \\ -\bar{u}_x + \bar{u}_y & w_2 \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \tag{2.63}$$

其中，

$$v = -|u|^2 + \frac{1}{2}(w_1 - w_2), \tag{2.64}$$

$w_1$ 与 $w_2$ 是实函数.

由于这时没有找到类似于(2.57)式的 $H$ 以构造(2.62)式的解的 Darboux 变换，需要引入共轭方程和二元 Darboux 变换. 我们对此不作一般性的叙述，只说明它们是如何应用到 DS Ⅰ 方程以得到新解的.

为简单起见，重写(2.63)式为

$$\begin{aligned} \Phi_y &= J\Phi_x + P\Phi, \\ \Phi_t &= 2\mathrm{i}J\Phi_{xx} + 2\mathrm{i}P\Phi_x + \mathrm{i}V_2\Phi. \end{aligned} \tag{2.65}$$

考虑它的共轭方程

$$\begin{aligned} \Psi_y &= \Psi_x J - \Psi P, \\ \Psi_t &= -2\mathrm{i}\Psi_{xx} J + 2\mathrm{i}(\Psi P)_x - \mathrm{i}\Psi V_2. \end{aligned} \tag{2.66}$$

这里,共轭方程是根据 $\Psi\Phi_y+\Psi_y\Phi$, $\Psi\Phi_t+\Psi_t\Phi$ 成为 $x$ 的导数的形式而作出的.不难直接验证(2.65)式和(2.66)式是互为共轭的.

利用 $P^*=-P$, $V_2^*=V_2-2P_x$, 可以得到如下的事实:如果 $\Phi$ 是(2.65)式的一个解,那么 $\Psi=\Phi^*$ 是(2.66)式的解,反之亦然.从而只要知道(2.65)式或(2.66)式中一个方程的解,就能显式写出它的共轭方程的解.

利用类似于§2.3 的方法,首先对共轭方程(2.66)式作 Darboux 变换:

$$\begin{aligned}&\Psi'=\Psi_x-\Psi S,\\&P'=P+[J,S],\\&V_2'=V_2-2P_x+2[P,S]-2S[J,S]+2(JS_x+S_xJ),\end{aligned}\tag{2.67}$$

其中

$$S=\Psi_0^{-1}\Psi_{0,x},\tag{2.68}$$

$\Psi_0$ 是(2.66)式的一个非退化 $2\times 2$ 矩阵解.但是,现在 $P'$ 不再满足 $P'^*=-P'$, $\Psi'^*$ 也不再是(2.65)式中的 $P$ 用 $P'$ 替代后所得方程的解.为了克服这个困难,需要引入二元 Darboux 变换,并再作一次 Darboux 变换以得到新解,其主要步骤是:

第一步:利用 Lax 对(2.65)式的解 $\Phi$ 和共轭方程(2.66)式的解 $\Psi$ 作 1 次微分形式

$$\begin{aligned}\omega(\Psi,\Phi)=&\Psi\Phi\mathrm{d}x+\Psi J\Phi\mathrm{d}y\\&+2\mathrm{i}(\Psi P\Phi+\Psi J\Phi_x-\Psi_xJ\Phi)\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{2.69}$$

可直接验证 $\omega(\Psi,\Phi)$ 是一个闭形式,即 $\omega$ 的外微分 $\mathrm{d}\omega(\Psi,\Phi)=0$. 在一个单连通区域中,$\omega$ 在闭回路上积分为 0,从而在 $\mathbf{R}^{1+2}$ 上可定义它的积分

$$\Omega(\Psi,\Phi)(x,y,t)=\int_{(x_0,y_0,t_0)}^{(x,y,t)}\omega(\Psi,\Phi),\tag{2.70}$$

这时积分和路径无关,而 $\omega(\Psi,\Phi)=\mathrm{d}\Omega(\Psi,\Phi)$.

第二步:令 $\Phi'=\Psi_0^{-1}\Omega(\Psi_0,\Phi)$, 经过演算,可以验证 $\Phi'$ 是(2.65)式中 $(P,V_2)$ 用 $(P',V_2')$ 替代后所得方程的解.

第三步:令 $\Phi_0'=\Psi_0^{-1}\Omega(\Psi_0,\Psi_0^*)$, 由它产生的 Darboux 算子 $\partial-\Phi_{0,x}'\Phi_0'^{-1}$ 作用于 $\Phi'$ 而得到 Darboux 变换

$$\Phi'' = \Phi'_x - \Phi'_{0,x}\Phi_0'^{-1}\Phi' = \Phi - \Psi_0^* \Omega(\Psi_0, \Psi_0^*)^{-1}\Omega(\Psi_0, \Phi),$$

$$P'' = P' + [J, \Psi'_{0,x}\Psi_0'^{-1}] = P + [J, \Psi_0^* \Omega(\Psi_0, \Psi_0^*)^{-1}\Psi_0]. \tag{2.71}$$

从 $P^* = -P$ 得出 $P''^* = -P''$，这样，就得到了 DSⅠ方程的一个新解.

上面的第一、二两步称为二元 Darboux 变换. 对 DSⅠ方程，我们用一次 Darboux 变换与一次二元 Darboux 变换的复合才得到一个新的解. 这时得到新解的算法就需要微分和积分运算.

上述二元 Darboux 变换是 Matveev, Salle 等首先引入的，它还有许多应用[63,59,91]. 有关二元 Darboux 变换的详细内容，请参阅文献[63].

## §2.5 在 1+1 维问题中的应用

在本节我们要利用定理 2.2 来讨论 Lax 对(Gelfand-Dickey 系统)

$$\begin{aligned} \lambda\Phi &= U(x, t, \partial)\Phi, \\ \Phi_t &= V(x, t, \partial)\Phi, \end{aligned} \tag{2.72}$$

其中

$$\begin{aligned} U(\partial) &= \sum_{j=0}^{m} U_{m-j}(x, t)\partial^j, \\ V(\partial) &= \sum_{j=0}^{n} V_{n-j}(x, t)\partial^j. \end{aligned} \tag{2.73}$$

由(2.72)式的第一式作出 $\Phi_t$，其结果应和第二式相一致，这就是(2.72)式的可积条件

$$U_t(\partial) + [U(\partial), V(\partial)] = 0. \tag{2.74}$$

设 $D(x, t, \partial)$ 是一个微分算子，如果对(2.72)式的任何解 $\Phi$，$\Phi' = D(\partial)\Phi$ 满足

$$\begin{aligned} \lambda\Phi' &= U'(x, t, \partial)\Phi', \\ \Phi'_t &= V'(x, t, \partial)\Phi', \end{aligned} \tag{2.75}$$

这里 $U'$, $V'$ 是形如

$$U'(\partial) = \sum_{j=0}^{m} U'_{m-j}(x, t)\partial^j,$$
$$V'(\partial) = \sum_{j=0}^{n} V'_{n-j}(x, t)\partial^j \tag{2.76}$$

的微分算子,则 $D(x, t, \partial)$称为(2.72)式的 Darboux 算子.

对一阶算子 $D(x, t, \partial) = \partial - S(x, t)$, 有如下定理:

**定理 2.4**　$\partial - S(x, t)$ 是(2.72)式的 Darboux 算子当且仅当 $S = H_x H^{-1}$, 其中 $H$ 是方程组

$$\begin{cases} H\Lambda = U(\partial)H, \\ H_t = V(\partial)H \end{cases} \tag{2.77}$$

的 $N \times N$ 非退化矩阵解,$\Lambda$ 是一个常值上三角矩阵.

**证明**　引入一个新的自变量 $y$,考虑方程组

$$\begin{cases} \Psi_y = U(x, t, \partial)\Psi, \\ \Psi_t = V(x, t, \partial)\Psi. \end{cases} \tag{2.78}$$

如果 $\partial - S(x, t)$ 是(2.72)式的 Darboux 算子,则存在 $U'(\partial)$, $V'(\partial)$,使

$$0 = (\partial - S)U(\partial) - U'(\partial)(\partial - S),$$
$$S_t = (\partial - S)V(\partial) - V'(\partial)(\partial - S). \tag{2.79}$$

由于 $S$ 与 $y$ 无关,(2.33)式成立,所以 $\partial - S$ 是(2.78)式的与 $y$ 无关的 Darboux 算子. 根据定理 2.2,存在(2.78)式的 $N \times N$ 非退化矩阵解 $H_0$, 使 $S = H_{0,x}H_0^{-1}$, 这时 $H_0$ 还可能与 $y$ 有关. 令

$L_0 = H_0^{-1}H_{0,y}$, 则由(2.32)式,有

$$L_0 = H_0^{-1}U(S)H_0,$$

$$\begin{aligned} L_{0,x} &= -H_0^{-1}H_{0,x}H_0^{-1}U(S)H_0 + H_0^{-1}(U(S))_x H_0 \\ &\quad + H_0^{-1}U(S)H_{0,x} \\ &= H_0^{-1}\{(U(S))_x - [S, U(S)]\}H_0 = 0, \end{aligned}$$

而由(2.39)式,有

$$L_{0,y}=-H_0^{-1}H_{0,y}H_0^{-1}U(S)H_0+H_0^{-1}U(S)H_{0,y}=0,$$

$$L_{0,t}=-H_0^{-1}H_{0,t}H_0^{-1}U(S)H_0+H_0^{-1}(U(S))_tH_0$$
$$+H_0^{-1}U(S)H_{0,t}$$
$$=H_0^{-1}\{(U(S))_t+[U(S),V(S)]\}H_0=0.$$

由此得到,$L_0$ 是一个常值矩阵,从而存在常值上三角阵 $\Lambda$ 及常值矩阵 $T$,使 $L_0=T\Lambda T^{-1}$. 由 $L_0$ 的定义,

$$H_{0,y}=H_0T\Lambda T^{-1},$$

所以

$$H_0(x,y,t)=H(x,t)\exp(\Lambda y)T^{-1},$$

其中 $H$ 满足(2.77)式, $S=H_xH^{-1}$.

反之,如果 $H$ 是(2.77)式的解, $S=H_xH^{-1}$, 则容易验证,$S$ 满足(2.79)式,即 $\partial-S$ 是(2.72)式 Darboux 算子. 证毕. ∎

**注 2.4** (1) 如果 $N=1$, 则 $H$ 满足 Lax 对(2.72)式.

(2) 如果上面定理证明中的 $L_0$ 可对角化,则 $H$ 中的每列都满足 $\lambda$ 取特定值的 Lax 对(2.72)式.

**例 2.5** 用上述方法也可直接推出原始的 Darboux 变换.

KdV 方程

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{2.80}$$

具有 Lax 对

$$\begin{aligned}&\lambda\phi=-\phi_{xx}-u\phi,\\&\phi_t=2(2\lambda-u)\phi_x+u_x\phi,\end{aligned} \tag{2.81}$$

由定理 2.4,立即可以得到它的 Darboux 变换

$$\phi'=\phi_x-\frac{f_x}{f}\phi, \tag{2.82}$$

其中 $f$ 是相应的 Lax 对当 $\lambda=\lambda_0$ 时的一个解. 经此 Darboux 变换后所得的 KdV 方程的解为

$$u'=u+2(\ln f)_{xx}. \tag{2.83}$$

**例 2.6** Boussinesq 方程

$$(u_{xxx}+6uu_x)_x+3\varepsilon u_{tt}=0\quad(\varepsilon=\pm1)$$

具有 Lax 对

$$\lambda\phi = \phi_{xxx} + \frac{3u}{2}\phi_x + w\phi, \tag{2.84}$$

$$\phi_t = \sigma\phi_{xx} + \sigma u\phi$$

$[\sigma^2 = \varepsilon,\ w_x = 3(\sigma u_{xx} + u_t)/4\sigma]$. 由定理 2.4,它的 Darboux 变换[60]是

$$\phi' = \phi_x - \frac{f_x}{f}\phi, \tag{2.85}$$

其中 $f$ 是相应的 Lax 对当 $\lambda = \lambda_0$ 时的一个解. 经此 Darboux 变换后,所得的 Boussinesq 方程的解为

$$\begin{aligned} u' &= u + 2(\ln f)_{xx}, \\ w' &= w + \frac{3}{2}u_x + 3[(\ln f)_{xxx} + (\ln f)_x(\ln f)_{xx}]. \end{aligned} \tag{2.86}$$

# 第3章　$1+n$ 维可积系统

在这一章中,我们讨论更高维数空间上的孤立子理论. 第1章的理论可以推广到一般的 $1+n$ 维空间的 AKNS 系统. 在这里突出之点是 Darboux 变换仍然可以应用,其构作方法仍然是具有普适性的代数算法. 不仅如此,还可以得出高维时空的孤立子仍然具有弹性散射的性质. 同时还指出,这种方程组的初始值只能给出在一空间直线上,可以分解为多次的 $1+1$ 维方程的求解. 这个理论内涵很广泛,可以把 $1+2$ 维的依不同方法作出的一些孤立子方程(如 KP、N 波和 DSI 方程)纳入这个方程的体系之中. 另外,我们还提出广义的自对偶杨-Mills 流的概念,也可以用 Darboux 变换来构作新的解,而且 $1+n$ 维空间的 AKNS 系统也可以看成是它们的一种约化. 这就在更广泛的意义上拓广了 Ward 提出的命题:"孤立子方程都可由自对偶杨-Mills 方程化约而得出"[78],并在高维时空提供了重要的情况.

## §3.1　高维 AKNS 系统

### 3.1.1　高维 AKNS 系统[26, 27, 42]

我们的物理时空是 $1+3$ 维的,但现在已充分发展的孤立子理论主要是关于 $1+1$ 维和 $1+2$ 维的,在高维情况还未充分展开. 在这里要系统地叙述我们关于高维时空的可积系统的研究结果,特别是构作了一类具有弹性散射性质的高维孤立子.

在本节中,将§1.2中介绍的 AKNS 系统推广到任意 $1+n$ 维,这里 $n$ 也可以是 2,但与第2章不同的是,这里的广义 AKNS 系统中仍保留有谱参数,而不是以微分算子替代.

设 $(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $1+n$ 维时空 $\mathbf{R}^{1+n}$ 的元素的坐标，其中 $(x_1, \cdots, x_n)$ 表示空间位置，$t$ 表示时间. 我们考虑如下的线性系统：

$$\begin{aligned} \partial_i \Psi &= U_i \Psi = (\lambda J_i + P_i)\Psi \quad (i = 1, \cdots, n), \\ \partial_t \Psi &= V\Psi = \sum_{\alpha=0}^{m} V_\alpha \lambda^{m-\alpha} \Psi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\partial_i$，$\partial_t$ 分别表示关于 $x_i$ 和 $t$ 的偏导数，$P_i$，$V_\alpha$ 都是 $N\times N$ 矩阵值函数，$P_i$ 的对角元为 0，$J_i$ 是常值对角矩阵. 由于(3.1)式含有多个方程，故称之为 Lax 组.

由(3.1)的第一式(即它的空间部分)的可积条件得

$$\partial_j U_i - \partial_i U_j + [U_i, U_j] = 0. \tag{3.2}$$

依谱参数 $\lambda$ 分解，我们得

$$[J_i, J_j] = 0, \tag{3.3}$$

$$[J_i, P_j] = [J_j, P_i], \tag{3.4}$$

$$\partial_j P_i - \partial_i P_j + [P_i, P_j] = 0. \tag{3.5}$$

由于 $J_i$ 是对角阵，(3.3)式自然成立. 为进一步讨论需要，我们假设：若矩阵 $A$ 满足 $[A, J_i] = 0$ (对所有 $i$)，则 $A$ 必为对角矩阵. 这个条件记为$(J)$并相当于：存在 $J_i$ 的某个线性组合 $J = \sum a_i J_i$，使 $J$ 的各个对角元素相异. 因此，可以通过 $x_i$ 的线性变换，使 $J_1$ 的各对角元素均不同. 本节的讨论就按这一假定下进行. 此外，还要假设 $J_i$ 线性无关，否则，经过 $J_i$ 的某个线性组合和空间变量的线性变换，能够达到 $J_n = 0$，这时(3.4)式给出 $P_n = 0$，从而空间维数可以降低.

由(3.4)式、(3.5)式可得如下性质：

(i) 存在 $N\times N$ 矩阵值函数 $P$，使得

$$P_i = [P, J_i], \tag{3.6}$$

且可假设 $P$ 的对角元是 0 或其他任意函数，因为 $P^{\text{diag}}$ 会自动消去.

(ii) 未知函数 $P$ 有空间约束

$$\partial_j P_i - \partial_i P_j + [P_i, P_j] = 0. \tag{3.7}$$

由(3.1)式的可积条件可得到 $V_\alpha$ 所满足的方程

$$[J_i, V_0] = 0, \quad \partial_i V_0 = 0, \tag{3.8}$$

$$[J_i, V_{\alpha+1}^{\text{off}}] = \partial_i V_\alpha^{\text{off}} - [P_i, V_\alpha]^{\text{off}}, \tag{3.9}$$

$$\partial_i V_{\alpha+1}^{\text{diag}} = [P_i, V_{\alpha+1}^{\text{off}}]^{\text{diag}}, \tag{3.10}$$

$$(\alpha = 0, 1, \cdots, m-1),$$

以及一组发展方程

$$\partial_t P_i - \partial_i V_m^{\text{off}} + [P_i, V_m]^{\text{off}} = 0. \tag{3.11}$$

方程(3.7)式～(3.11)式中有许多是多余的,事实上,在条件($J$)成立时,可以假设 $J_1$ 的全部对角元都互不相等,这可以由对 $(x_1, \cdots, x_n)$ 作线性变换而实现. 由(3.6)式可知,$P$(除不起作用的对角元外)由 $P_1$ 决定,$P_1$ 实质上就是全体的未知函数. 下面的引理表明,方程(3.7)式～(3.11)式可用它的一个子集代替.

**引理 3.1** 设 $J_1$ 的各对角元互不相等, 则(3.7)式～(3.11)式等价于

$$\partial_1 P_i - \partial_i P_1 + [P_i, P_1] = 0, \tag{3.12}$$

$$[J_i, V_{\alpha+1}^{\text{off}}] = \partial_i V_\alpha^{\text{off}} - [P_i, V_\alpha]^{\text{off}}, \tag{3.13}$$

$$\partial_i V_\alpha^{\text{diag}} = [P_i, V_\alpha^{\text{off}}]^{\text{diag}}, \tag{3.14}$$

$$\partial_t P_1 - \partial_1 V_m^{\text{off}} + [P_1, V_m]^{\text{off}} = 0. \tag{3.15}$$

**证明** (3.13)式与(3.14)式只是(3.9)式与(3.10)式的重复表示. 所以只需证明(3.12)式和(3.15)式可导出(3.7)式与(3.11)式. 记

$$\Delta_{ij} = \partial_j P_i - \partial_i P_j + [P_i, P_j], \tag{3.16}$$

由直接计算及 Jacobi 恒等式得

$$\begin{aligned}[J_1, \Delta_{ij}] &= \partial_j [J_i, P_1] - \partial_i [J_j, P_1] + [J_1, [P_i, P_j]] \\ &= [J_i, \Delta_{1j}] - [J_j, \Delta_{1i}].\end{aligned} \tag{3.17}$$

由 $P_i = [P, J_i]$, $P_j = [P, J_j]$, 可直接验证$[P_i, P_j]$的对角元全为 0. 因此 $\Delta_{ij}$ 的对角元也全为 0. 利用 $\Delta_{1i} = 0 (i \geqslant 2)$ 即可得到:对任意 $i, j$, $[J_1, \Delta_{ij}] = 0$, 因而 $\Delta_{ij}^{\text{off}} = 0$, 所以 $\Delta_{ij} = 0$. 这就证明了(3.7)式.

下面考虑(3.11)式. 对任意 $i>1$, 在(3.15)式成立时,注意到 $[P_i, J_j]=[P_j, J_i]$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&[\partial_t P_i-\partial_i V_m+[P_i, V_m], J_1] \\
&=[\partial_1 V_m-[P_1, V_m], J_i]-[\partial_i V_m-[P_i, V_m], J_1] \\
&=\partial_1[V_m, J_i]-\partial_i[V_m, J_1]+[[P_i, V_m], J_1]-[[P_1, V_m], J_i].
\end{aligned}
$$

由(3.7)式、(3.9)式、(3.10)式及 Jacobi 恒等式,上式又等于

$$
\begin{aligned}
&\partial_1[P_i, V_{m-1}]-\partial_i[P_1, V_{m-1}]-[[V_m, J_1], P_i]+[[V_m, J_i], P_1] \\
&=[\partial_1 P_i-\partial_i P_1, V_{m-1}]+[P_i, [P_1, V_{m-1}]]-[[P_1, [P_i, V_{m-1}]] \\
&=0. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

从而有(3.11)式. 引理证毕. ∎

由此引理,我们将空间约束简化为(3.12)式,而将演化方程简化为(3.15)式. 不过,就一般情况而言,(3.12)式和(3.15)式合在一起仍然是超定的偏微分方程组.

从第1章已经知道,当 $n=1$ 时, $V_\alpha$ 一定存在,并且是 $P$ 的微分多项式. 现在,在 $n>1$ 时,由于 $V_\alpha$ 满足一系列方程(3.13)式、(3.14)式,它们是否是 $P$ 的微分多项式需要证明,而且它们的存在性也不是显然的. 事实上,答案是肯定的,我们不但可以逐次具体地求出 $V_0$, $V_1$, $V_2$ 等等,而且还有如下的引理:

**引理 3.2** (1)满足(3.13)式与(3.14)式的 $\{V_\alpha\}$ 必存在,它们是 $P$ 及其 $x$ 导数的多项式. 我们将其记为 $V_\alpha=V_\alpha[P]$; (2)对于给定的一组对角矩阵 $\{V_\alpha^0(t)\}$(与 $x_i$ 无关),存在唯一的 $\{V_\alpha[P]\}$ 满足 $V_\alpha[0]=V_\alpha^0(t)$.

证明大意: $V_0$, $V_1$ 可由(3.13)式、(3.14)式经直接计算得到. 对一般的 $V_\alpha$, 可用数学归纳法证明. 首先利用文献[80]中的结果说明,如果将 $x_2, \cdots, x_n$ 看作参数,则 $V_\alpha$ 是 $P$, $\partial_1 P$, $\cdots$, $\partial_1^q P$ 的多项式,然后利用空间约束(3.12)式还可证明,这样给出的微分多项式可满足(3.13)式与(3.14)式中的所有方程. 证明的演算相当繁复,这里不再写出,请参阅文献[42]. ∎

从此引理知,由 Lax 组(3.1)式导出的方程都是关于自变量 $x_1, \cdots, x_n$, $t$ 的偏微分方程,特别,(3.15)式是 $P$ 的偏微分方程组.

### 3.1.2 例子

在系统(3.1)式中，由于 $m$, $n$, $N$ 都是任意的 ($N \geqslant n$), $J_i$ 的任意性也很大，因此(3.1)式可产生大量的非线性方程. 下面举两个简单的例子.

**例 3.1** $n = N = 2$, $m = 2$,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

$p$ 与 $q$ 为复值函数，此时，

$$P_1 = [P, J_1] = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = [P, J_2] = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

Lax 集为

$$\partial_1 \Psi = (\lambda J_1 + P_1)\Psi,$$

$$\partial_2 \Psi = (\lambda J_2 + P_2)\Psi,$$

$$\partial_t \Psi = (V_0\lambda^2 + V_1\lambda + V_2)\Psi.$$

现在空间约束成为

$$\partial_2 P_1 - \partial_1 P_2 = 0$$

或

$$\partial_1 p + \mathrm{i}\,\partial_2 p = 0, \quad \partial_1 q + \mathrm{i}\,\partial_2 q = 0,$$

即 $p$ 与 $q$ 是复变量 $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ 的解析函数，而 $\partial_1 p = p_z$, $\partial_1 q = q_z$. 由递推关系可得

$$V_0 = V_0^0 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} b_1 & (a_2 - a_1)p \\ (a_1 - a_2)q & b_2 \end{pmatrix},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} (a_1 - a_2)pq + c_1 & (a_2 - a_1)p_z + (b_2 - b_1)p \\ (a_2 - a_1)q_z + (b_1 - b_2)q & (a_2 - a_1)pq + c_2 \end{pmatrix},$$

其中 $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ 是 $t$ 的函数，得到的非线性发展方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t}+(a_2-a_1)p_{xx}+(b_2-b_1)p_x+2(a_2-a_1)p^2q+(c_2-c_1)p=0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+(a_1-a_2)q_{xx}+(b_2-b_1)q_x+2(a_1-a_2)pq^2+(c_1-c_2)q=0.$$

**例 3.2**　$n=N=3,\ m=2$,

$$J_1=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}0&&\\&\mathrm{i}&\\&&0\end{pmatrix},$$

$$J_3=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

这时,

$$V_0[P]=V_0^0(t),$$

$$V_1[P]=[P,V_0]+V_1^0(t),$$

$$V_2[P]=-\sum J_j\left[\frac{\partial P}{\partial x_j},V_0\right]+[P,[P,V_0]]^{\mathrm{off}}+[P,V_1^0]^{\mathrm{off}}$$
$$-([P,V_0]P)^{\mathrm{diag}}+V_2^0(t).$$

所得到的发展方程为一个二阶拟线性方程组. 我们将在以后讨论它的孤立子解.

## § 3.2　Darboux 变换与孤立子解

### 3.2.1　Darboux 变换

我们要作高维的 AKNS 系统的 Darboux 变换.

在第 1 章中已经看到, 一次的 Darboux 阵是最基本的, 高次的 Darboux 阵是一次 Darboux 阵的乘积, 可以设想(也不难证明), 这事实在 $1+n$ 维情形也成立, 所以在这里只讨论下述形式的 Darboux 阵:

$$D(x,\ t,\ \lambda)=\lambda I-S(x,\ t). \tag{3.19}$$

令 $\Psi'=(\lambda I-S)\Psi$, 并代入

$$\partial_i\Psi'=(\lambda J_i+P'_i)\Psi', \tag{3.20}$$

就得出

$$P'_i=P_i+[J_i,\ S], \tag{3.21}$$

$$\partial_i S+SP_i=P'_i S. \tag{3.22}$$

由(3.21)式及 $P'_i=[P',\ J_i]$, 有

$$P'=P-S+\text{任何对角阵}$$

成立. 为方便计,可令

$$P'=P-S, \tag{3.23}$$

而(3.22)式化为

$$\partial_i S=[P_i,\ S]+[J_i,\ S]S. \tag{3.24}$$

又把 $\Psi'$代入

$$\partial_t\Psi'=\sum_{\alpha=0}^{m}V'_\alpha\lambda^{m-\alpha}\Psi', \tag{3.25}$$

关于 $\lambda$ 展开,就得出

$$\begin{aligned}&V'_0=V_0,\\&V'_{\alpha+1}=V_{\alpha+1}-SV_\alpha+V'_\alpha S\quad(\alpha=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1),\end{aligned} \tag{3.26}$$

以及

$$\partial_t S=\Big[\sum_{\alpha=0}^{m}V_\alpha S^{m-\alpha},\ S\Big]. \tag{3.27}$$

(3.22)式和(3.27)式是 $S$ 所满足的偏微分方程组,通过直接的计算可以验证,这是一个完全可积的偏微分方程组,从而当 $t=t_0$ 及 $x_i=x_{i0}$ 时 $S$ 的值给定后,在一定的区域中,解 $S$ 是唯一存在的.

我们还须证明

$$V'_\alpha=V_\alpha[P'], \tag{3.28}$$

这样才可保证 $P'$和 $P$ 适合同样的发展方程(3.11)式(或(3.15)式). 对于 $\alpha=0,\ 1,\ 2$ 等,(3.28)式可以直接验算,对一般的 $\alpha$,它的证明较冗长,但与定理 1.4 完全类似,这里就不再叙述了.

根据上述讨论及作 Darboux 阵的一般方法,有如下定理:

**定理 3.1**　设 $P$ 是(3.15)式的解. 对给定的常值对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$, 令 $h_i$ 为(3.1)式当 $\lambda = \lambda_i$ 时的列向量解, $H = (h_1, \cdots, h_N)$. 当 $\det H \neq 0$ 时,令 $S = H\Lambda H^{-1}$, 则 $\lambda I - S$ 是(3.1)式的 Darboux 阵. 这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 是不全相等的 $N$ 个数.

**证明**　证明和第 1 章相类似. ■

从而,利用 Darboux 变换,从已知的 $P^{(0)}$ 和相应的线性方程组(3.1)式的解 $\Psi^{(0)}$ 出发,可依相同的代数的算法作出解的系列:

$$(P^{(0)}, \Psi^{(0)}) \longrightarrow (P^{(1)}, \Psi^{(1)}) \longrightarrow (P^{(2)}, \Psi^{(2)}) \longrightarrow \cdots.$$

我们进一步看到公式

$$S = H\Lambda H^{-1} \tag{3.29}$$

有范围很广的普适性.

### 3.2.2　$u(N)$ 情形

如果 $P$ 还满足一些约束条件,则运用上述的 Darboux 变换一般不能保持这些约束条件,这时 Darboux 变换的构作要添加新的限制,使得这种约束条件能够保留下来. 这是一个相当复杂的问题. 在 1+1 维情形,我们已给出过若干有约束条件时可以实施 Darboux 变换的情形,现在也将给出一种新的情况.

设

$$J_j = \mathrm{i}e_j = \mathrm{i}\,\mathrm{diag}(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)\text{(第 } j \text{ 个分量为 1)}, \tag{3.30}$$

$P \in u(N)$ (即 $P^* = -P$) 是(3.5)式在 $\mathbf{R}^{1+n}$ 上的整体解,$\Psi$ 是其 Lax 对的基本解. 此时就有

$$P_i^* = [P, J_i]^* = [J_i^*, P^*] = [J_i, P] = -P_i. \tag{3.31}$$

在解(3.8)式～(3.10)式时,取 $V_\alpha$ 的"积分常数"($t$ 的函数) $V_\alpha^0(t) = V_\alpha[0]$ 为属于 $u(N)$的对角阵,即纯虚的对角阵,则就有

$$V_\alpha \in u(N)\ (\alpha = 0, 1, \cdots, m). \tag{3.32}$$

事实上, $V_0 = V_0^0(t) \in u(N)$. 设 $V_l \in u(N)$, 由 $\alpha = l$ 时的(3.9)式知,

$[J, V_{l+1}^{\text{off}}] \in u(N)$. 由此可以得到 $V_{l+1}^{\text{off}} \in u(N)$. 由 $\alpha = l$ 时的(3.10)式知, $\partial_i V_{l+1}^{\text{diag}} \in u(N)$, 所以 $V_{l+1}^{\text{diag}}$ 如在某一点属于 $u(N)$,则 $V_{l+1}^{\text{diag}} \in u(N)$. 这样就用数学归纳法证明了(3.32)式.

我们现在希望作出 Darboux 变换

$$(P, \Psi) \to (P', \Psi'),$$

使 $P' \in u(N)$. 为此,在制作 $H$ 和 $S$ 时,令 $\lambda_\alpha$ 只取到两个相互共轭的复数:

$$\lambda_\alpha = \mu \quad \text{或} \quad \bar{\mu} \quad (\mu \neq \bar{\mu}). \tag{3.33}$$

在某一固定点,取 $h_\alpha^0$ 使得

$$h_\beta^{0*} h_\alpha^0 = 0 \quad (\mu_\beta \neq \mu_\alpha).$$

以 $h_\alpha^0$ 为初始条件,方程组

$$\partial_i h_\alpha = (\lambda_\alpha J_i + P_i) h_\alpha,$$

$$\partial_t h_\alpha = \sum_{l=0}^{m} V_l \lambda_\alpha^{m-l} h_\alpha$$

的列向量解为 $h_\alpha$, 因而

$$\partial_i h_\alpha^* = h_\alpha^* (-\bar{\lambda}_\alpha J_i - P_i), \quad \partial_t h_\alpha^* = -h_\alpha^* \sum_{l=0}^{m} V_l \bar{\lambda}_\alpha^{m-l}$$

也成立. 当 $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ 时, $\bar{\lambda}_\beta = \lambda_\alpha$,

$$\partial_i (h_\beta^* h_\alpha) = 0, \ \partial_t (h_\beta^* h_\alpha) = 0.$$

所以

$$h_\beta^* h_\alpha = 0 \tag{3.34}$$

处处成立. 此外,如果对应于 $\lambda_\alpha = \mu$ 时的一组 $\{h_\alpha^0\}$ 线性无关,对应于 $\lambda_\beta = \bar{\mu}$ 时的一组 $\{h_\beta^0\}$ 也线性无关,由线性微分方程的性质可知,$\{h_\alpha\}$ 和 $\{h_\beta\}$ 这两组向量处处都是线性无关的, 由(3.34)式知 $\{h_1, \cdots, h_N\}$ 线性无关. 因此 $\det H \neq 0$, $S = H\Lambda H^{-1}$ 在整个 $\mathbf{R}^{1+n}$ 上有意义. 根据 $S$ 的定义,有

$$S h_\alpha = \lambda_\alpha h_\alpha, \ h_\beta^* S^* = h_\beta^* \bar{\lambda}_\beta, \tag{3.35}$$

所以

$$h_\beta^* (S^* + S) h_\alpha = (\lambda_\alpha + \bar{\lambda}_\beta) h_\beta^* h_\alpha.$$

由此可见,如 $\lambda_\alpha = \mu$, $\lambda_\beta = \bar{\mu}$, 则

$$h_\beta^* (S^* + S) h_\alpha = 0.$$

如 $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \mu$ (或 $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \bar{\mu}$),

$$h_\beta^* (S^* + S) h_\alpha = (\mu + \bar{\mu}) h_\beta^* h_\alpha,$$

所以

$$S + S^* = (\mu + \bar{\mu}) I. \tag{3.36}$$

再由(3.35)式,

$$h_\beta^* S^* S h_\alpha = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\beta h_\beta^* h_\alpha. \tag{3.37}$$

如 $\lambda_\alpha = \mu$, $\lambda_\beta = \bar{\mu}$, 则

$$h_\beta^* S^* S h_\alpha = 0, \tag{3.38}$$

如 $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \mu$ (或 $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \bar{\mu}$),

$$h_\beta^* S^* S h_\alpha = |\mu|^2 h_\beta^* h_\alpha,$$

所以

$$S^* S = |\mu|^2 I. \tag{3.39}$$

由此还可得到

$$(\bar{\lambda} I - S)^* (\lambda I - S) = (\lambda - \mu)(\lambda - \bar{\mu}) I.$$

由(3.23)式可知, $P'^{\text{off}} \in u(N)$. 进一步,由 Darboux 变换对 $V_\alpha$ 的作用,

$$\sum_{\alpha=0}^{m} V'_\alpha \lambda^{m-\alpha} = (\lambda I - S) \sum_{\alpha=0}^{m} V_\alpha \lambda^{m-\alpha} (\lambda I - S)^{-1} + (\lambda I - S)_t (\lambda I - S)^{-1},$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\alpha=0}^{m} V'_\alpha \lambda^{m-\alpha}\right)^* &= (\lambda I - S)^{*-1} \sum_{\alpha=0}^{m} V_\alpha^* \bar{\lambda}^{m-\alpha} (\lambda I - S)^* \\ &\quad + (\lambda I - S)^{*-1} (\lambda I - S)_t^* \\ &= -(\bar{\lambda} I - S) \sum_{\alpha=0}^{m} V_\alpha \bar{\lambda}^{m-\alpha} (\bar{\lambda} I - S)^{-1} \\ &\quad - (\bar{\lambda} I - S)_t (\bar{\lambda} I - S)^{-1} \\ &= -\sum_{\alpha=0}^{m} V'_\alpha \bar{\lambda}^{m-\alpha}.\end{aligned}$$

这就证明了 $V'_\alpha \in u(N)$.

至此,我们给出了一个具有 $u(N)$ 化约问题的 Darboux 变换的构作. 许多带有 $u(N)$ 化约的问题都可采用类似的构作方法.

### 3.2.3 孤立子解

现在考虑孤立子解的构作问题. 为了不致有过于繁复的式子,我们取 $n=3$, $N=3$, $m=2$ 的情形来讨论,从而可以构作某些单重和多重孤立子解,并且证明在多重孤立子解中,单孤立子的相互作用是弹性散射. 现在取

$$V_0^0=\begin{pmatrix} a_1\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & a_2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & a_3\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad V_1^0=\begin{pmatrix} b_1\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & b_2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & b_3\mathrm{i}\end{pmatrix},$$

$$V_2^0=\begin{pmatrix} c_1\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & c_2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & c_3\mathrm{i}\end{pmatrix},$$

其中 $a_i$, $b_i$, $c_i(i=1,2,3)$ 是实的常数.

像以前一样,初始解仍取为 $P=0$, 则有

$$\Psi_0=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x_1+\phi_1(\lambda)t)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x_2+\phi_2(\lambda)t)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x_3+\phi_3(\lambda)t)}\end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

这里

$$\phi_i(\lambda)=a_i\lambda^2+b_i\lambda+c_i\quad (i=1,2,3). \tag{3.41}$$

取

$$\lambda_1=\mu,\ \lambda_2=\lambda_3=\overline{\mu}\quad (\mu\neq\overline{\mu}), \tag{3.42}$$

$$\zeta_i=\mu x_i+\phi_i(\mu)t, \tag{3.43}$$

再取

$$H=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta_1} & -\overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\zeta}_1} & -\overline{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\zeta}_1} \\ a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta_2} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\zeta}_2} & 0 \\ b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta_3} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\zeta}_3}\end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

则 $\{\lambda_i\}$ 和 $H$ 满足(3.33)式和(3.34)式中的条件,且

$$\det H = e^{i(\zeta_1+\bar{\zeta}_2+\bar{\zeta}_3)}\Delta, \tag{3.45}$$

$$\Delta = 1+|a|^2 e^{i[(\zeta_2-\bar{\zeta}_2)-(\zeta_1-\bar{\zeta}_1)]}+|b|^2 e^{i[(\zeta_3-\bar{\zeta}_3)-(\zeta_1-\bar{\zeta}_1)]} > 0. \tag{3.46}$$

所得到的新的解由三个波组成,其表达式为

$$\begin{aligned} p &= S_{23} = a\bar{b}(\mu-\bar{\mu})e^{i[(\zeta_2-\zeta_1)-(\bar{\zeta}_3-\bar{\zeta}_1)]}/\Delta, \\ q &= S_{13} = (\mu-\bar{\mu})\bar{b}e^{i(\bar{\zeta}_1-\bar{\zeta}_3)}/\Delta, \\ r &= S_{12} = (\mu-\bar{\mu})\bar{a}e^{i(\bar{\zeta}_1-\bar{\zeta}_2)}/\Delta. \end{aligned} \tag{3.47}$$

根据(3.43)式及(3.47)式,$|p|$, $|q|$, $|r|$是速度为

$$v_i = -\frac{\phi_i(\bar{\mu})-\phi_i(\mu)}{\bar{\mu}-\mu} \quad (i=1,2,3) \tag{3.48}$$

的行波. 事实上,

$$\begin{aligned} |p| &= |ab||\mu-\bar{\mu}|e^{i(\mu-\bar{\mu})[(\xi_2-\xi_1)+(\xi_3-\xi_1)]/2}/\Delta, \\ |q| &= |b||\mu-\bar{\mu}|e^{i(\mu-\bar{\mu})(\xi_3-\xi_1)/2}/\Delta, \\ |r| &= |a||\mu-\bar{\mu}|e^{i(\mu-\bar{\mu})(\xi_2-\xi_1)/2}/\Delta, \end{aligned} \tag{3.49}$$

其中

$$\Delta = 1+|a|^2 e^{i(\mu-\bar{\mu})(\xi_2-\xi_1)}+|b|^2 e^{i(\mu-\bar{\mu})(\xi_3-\xi_1)}, \tag{3.50}$$

$$\xi_i = x_i - v_i t \quad (i=1,2,3). \tag{3.51}$$

对于固定的 $t$, $|p|$, $|q|$, $|r|$都是有界的,且当 $|x|\to\infty$ 时,它们在除去一些低维的方向外都充分快地趋于零. 我们设 $i(\mu-\bar{\mu})>0$, 则这些方向是:

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ |p|:\ |x_2-x_3|\not\to+\infty,\ 2x_1-x_2-x_3\not\to+\infty, \\ &\text{(ii)}\ |q|:\ |x_3-x_1|\not\to+\infty,\ 2x_2-x_1-x_3\not\to+\infty, \\ &\text{(iii)}\ |r|:\ |x_2-x_1|\not\to+\infty,\ 2x_3-x_1-x_2\not\to+\infty. \end{aligned} \tag{3.52}$$

这样,就得到了单孤立子解,每个解都包含 $p$, $q$, $r$ 三个波. 当 $i(\mu-\bar{\mu})<0$ 时,(3.52)式中$\infty$之前的“－”号和“＋”号要分别改为“＋”号和“－”号. 这样所得到的孤立子不是完全局部化的. 事实上,沿直线 $x_2-x_1=\text{const}$, $x_3-x_1=\text{const}$, $p$, $q$, $r$ 为常数.

进一步，$S$ 的其他分量为：

$$S_{11}=\frac{1}{\Delta}(\mu+\overline{\mu}\mid a\mid^2 e^{i(\mu-\overline{\mu})(\xi_2-\xi_1)}+\overline{\mu}\mid b\mid^2 e^{i(\mu-\overline{\mu})(\xi_3-\xi_1)}),$$

$$S_{22}=\frac{1}{\Delta}(\overline{\mu}+\mu\mid a\mid^2 e^{i(\mu-\overline{\mu})(\xi_2-\xi_1)}+\overline{\mu}\mid b\mid^2 e^{i(\mu-\overline{\mu})(\xi_3-\xi_1)}), \quad (3.53)$$

$$S_{33}=\frac{1}{\Delta}(\overline{\mu}+\overline{\mu}\mid a\mid^2 e^{i(\mu-\overline{\mu})(\xi_2-\xi_1)}+\mu\mid b\mid^2 e^{i(\mu-\overline{\mu})(\xi_3-\xi_1)}).$$

它们将在构造多孤立子解时用到.

**注 3.1** 如果 $a_i$, $b_i$, $c_i$ 不是常数，而是 $t$ 的函数，则所得到的孤立子解是变速度的. 这时，(3.43)式中的项 $\phi_i(\lambda)t$ 要改为

$$\begin{aligned}\omega_i(\lambda, t)&=\int_{t_0}^{t}\phi_i(\lambda, \tau)d\tau\\&=\int_{t_0}^{t}[a_i(\tau)\lambda^2+b_i(\tau)\lambda+c_i(\tau)]d\tau.\end{aligned} \quad (3.54)$$

特别是，$|p|$, $|q|$, $|r|$ 沿

$$x_i+\frac{\omega_i(\overline{\mu}, t)-\omega_i(\mu, t)}{\overline{\mu}-\mu}=\text{const}$$

保持为常数. 对函数 $a_i$, $b_i$, $c_i$ 的不同选取，可以使波的传播具有非常多样的形式. 例如若 $a_i$, $b_i$, $c_i$ 的积分是周期函数，则就得到周期振荡的波；如果它们是增加得很快的函数，则各个波的加速度很大，会很快向远处传走.

$k$ 重孤立子解可以通过从 $P=0$ 出发的 $k$ 次 Darboux 变换得到. 现取参数 $\mu_0$, $\mu_1$, $\cdots$, $\mu_{k-1}$ ($a\neq b$ 时，$\mu_a\neq\mu_b$, $\mu_a\neq\overline{\mu}_b$)，则有

$$\Psi_l(\lambda, x, t)=(\lambda I-S_{l-1})\cdots(\lambda I-S_0)\Psi_0, \quad (3.55)$$

所得到的非线性方程的解为

$$P^l=-(S_0+S_1+\cdots+S_{l-1}). \quad (3.56)$$

这里 $S_0$, $S_1$, $\cdots$, $S_{k-1}$ 是根据定理 3.1、(3.33)式和(3.34)式逐次作出来的. 我们进一步假设

$$\{v_i(\mu_l)\} \quad (i=1, 2, \cdots, n;\ l=0, 1, \cdots, k-1) \quad (3.57)$$

互不相同.

多孤立子有如下性质：

**定理3.2**　当 $t\to\pm\infty$ 时，一个 $k$ 重孤立子渐近于 $k$ 个单孤立子，$t\to-\infty$ 和 $t\to+\infty$ 时所出现的孤立子具有相同的波形.

**证明**　先叙述 $k=2$ 的情形：我们在以速度 $\{v_i(\mu_1)\}$ 运动的坐标系中考察二重孤立子的渐近形态，即让 $\xi_i^1=x_i-v_i(\mu_1)t$ 保持有限，而使 $t\to\pm\infty$，这时

$$\xi_i^0-\xi_j^0=x_i-x_j-(v_i(\mu_0)-v_j(\mu_0))t\to\pm\infty\quad(i\neq j),\tag{3.58}$$

$$S_0\sim\begin{pmatrix}\sigma_1^{\pm}&&\\&\sigma_2^{\pm}&\\&&\sigma_3^{\pm}\end{pmatrix}\quad(t\to\pm\infty),\tag{3.59}$$

其中，$\sigma_i^{\pm}=\mu_0$ 或 $\bar{\mu}_0$，"～"表示渐近形态.因此

$$\Psi_1\sim\begin{pmatrix}(\lambda-\sigma_1^{\pm})e^{i(\lambda x_1+\phi_1(\lambda)t)}&&\\&(\lambda-\sigma_2^{\pm})e^{i(\lambda x_2+\phi_2(\lambda)t)}&\\&&(\lambda-\sigma_3^{\pm})e^{i(\lambda x_3+\phi_3(\lambda)t)}\end{pmatrix}.\tag{3.60}$$

我们取 $H_1$ 使得

$$H_1\sim\begin{pmatrix}e^{i\zeta_1^1}&-\bar{a}_1e^{i\bar{\zeta}_1^1}&-\bar{b}_1e^{i\bar{\zeta}_1^1}\\a_1e^{i\zeta_2^1}&e^{i\bar{\zeta}_2^1}&0\\b_1e^{i\zeta_3^1}&0&e^{i\bar{\zeta}_3^1}\end{pmatrix},\tag{3.61}$$

这里

$$\zeta_i^1=\mu_1x_i+\phi_i(\mu_1)t-\ln(\mu_1-\sigma_i^{\pm})i.\tag{3.62}$$

(3.61)式、(3.62)式与(3.44)式、(3.43)式类似，因此，对 $S_1$ 的渐近性态，有分别类似于(3.47)式、(3.49)式、(3.53)式的等式成立，只是将其中的 $a,b,\mu,\zeta_i$ 分别改为 $a_1,b_1,\mu_1,\zeta_i^1$. 所以当 $t\to\pm\infty$ 且 $\xi_i^1$ 保持有限时，

$$P^2=-S_0^{\text{off}}-S_1^{\text{off}}$$

渐近于一个单孤立子解.

当 $t\to+\infty$ 与 $t\to-\infty$ 时，$p_1,q_1,r_1$ 波的渐近形态分别都是相同的，

但是注意到在(3.62)式中的附加项 $-\ln(\mu_1-\sigma_i^{\pm})$i 当 $t\to+\infty$ 与 $t\to-\infty$ 时可能是不同的,它们的差代表了相移.这就是说,波的基准位置 $\xi_i^1=0$ 和直线 $x_i-v_i(\mu_1)t=0$ 在 $t\to\pm\infty$ 时有不同的偏移.

当 $t\to\pm\infty$, $\xi_i^0=x_i-v(\mu_0)t$ 保持有限(则必有 $\xi_i^1\to\pm\infty$)时,应用可换性定理可证明同样的结果.

这样,在 $k=2$ 时定理已得到证明.

同第1章一样,多次运用 Darboux 变换可以得到多孤立子解.利用数学归纳法同样可以证明,在较一般情形下,当 $t\to\pm\infty$ 时,多孤立子解分解为单孤立子解,而这些单孤立子解之间的相互作用是弹性散射,即其模的形状和速度都恢复原状,但可能发生相移,它是由(3.62)式中的 $\sigma_i^{\pm}$ 当 $t\to\pm\infty$ 时取不同数值而产生的. ∎

这样得到的孤立子在相互作用时具有弹性散射的性质,而且可计算其相移.这就是说,它们具有1+1维孤立子所具有的最基本性质.正是这个基本性质的发现,才使孤立子理论得到了充分的重视和发展.

图3.1～图3.5即表示了双孤立子的相互作用时的 $p$ 波.

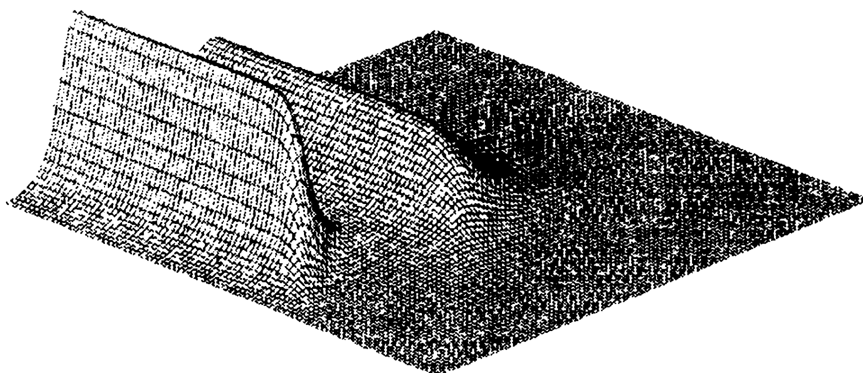


**图3.1　双孤立子的 $p$ 波, $t=-1$**

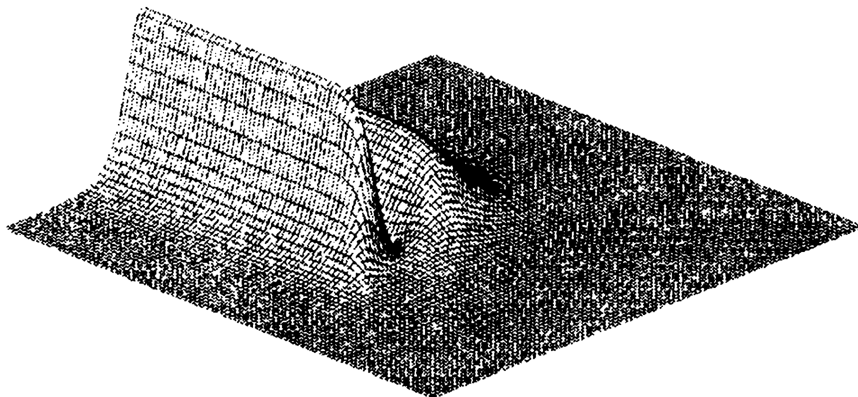


**图3.2　双孤立子的 $p$ 波, $t=-0.5$**

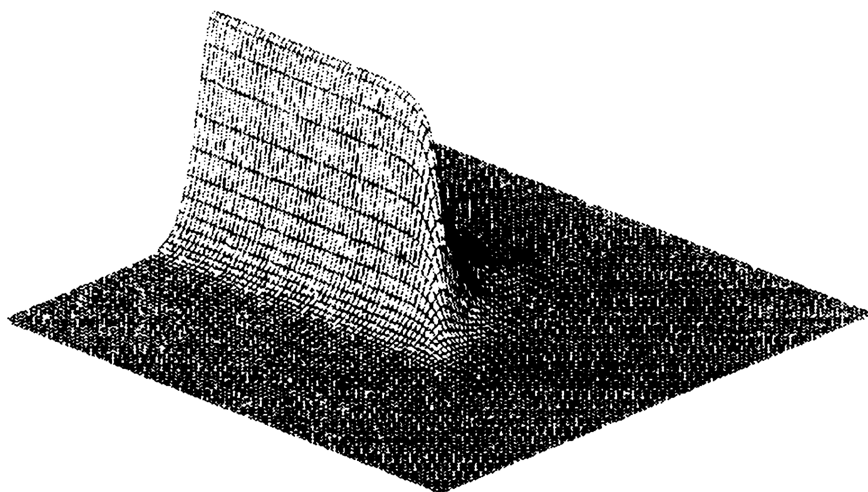


图 3.3　双孤立子的 $p$ 波，$t = 0$

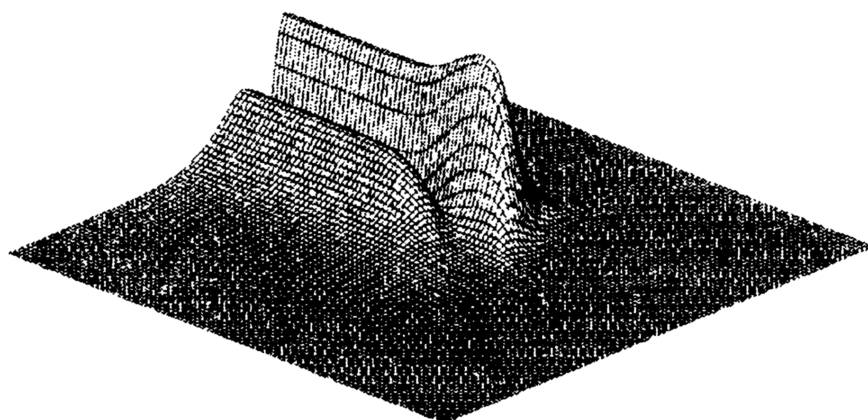


图 3.4　双孤立子的 $p$ 波，$t = 0.5$

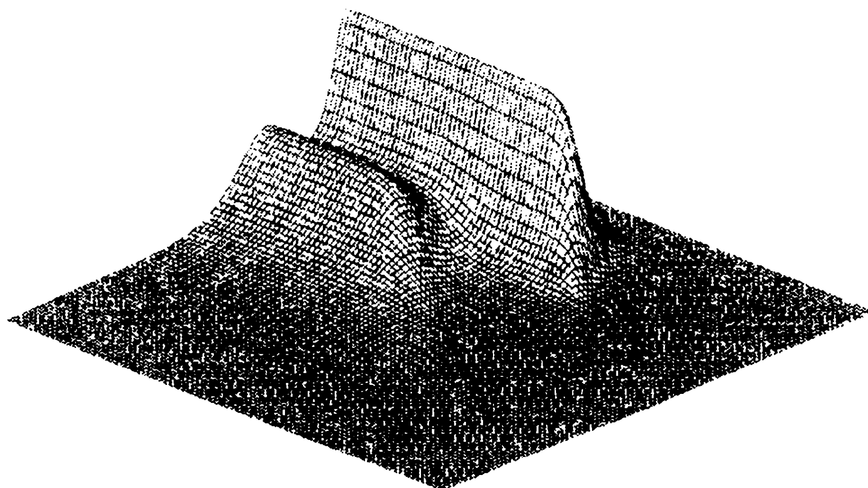


图 3.5　双孤立子的 $p$ 波，$t = 1$

## §3.3 Cauchy 问题

现在考虑带约束条件(3.12)式的发展型方程(3.15)式的定解问题.仍然假定 $J_1$ 的对角元相异,并设所有的 $J_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的元素为纯虚的.我们设 $P \in u(N)$,因而所有 $P_i \in u(N)$. 前面已见到,可以取定 $V_\alpha$,使 $V_\alpha \in u(N)$. 根据偏微分方程的一般理论,对(3.12)式而言,直线 $t=t_0, x_2=x_2^0, \cdots, x_n=x_n^0$ 是非特征的.如果在 $\mathbf{R}^n(t=0)$ 上给定满足约束条件(3.12)式的初值 $P(0, x)$,可望得到 $\mathbf{R}^{1+n}$ 上的解,但为了得到满足约束条件的初始值,定解条件所在的集合可以逐步减缩.终于可以把初始条件减缩为在 $t=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$ 上给定初值

$$P(0, x_1, 0, \cdots, 0)=P_0(x_1), \tag{3.63}$$

根据此来求解方程组(3.12)式和(3.15)式.

(3.12)式可采取如下的步骤求解:以(3.63)式为初始条件,在 $t=0$ 时,在 $x_3=\cdots=x_n$ 平面上对(3.12)式中的

$$\Delta_{12}=\frac{\partial P_2}{\partial x_1}-\frac{\partial P_1}{\partial x_2}+[P_2, P_1]=0 \tag{3.12'}$$

求解,得出 $P(0, x_1, x_2, 0, \cdots, 0)$. 然后以它为初始值求解

$$\Delta_{13}=\frac{\partial P_3}{\partial x_1}-\frac{\partial P_1}{\partial x_3}+[P_3, P_1]=0, \tag{3.12''}$$

得出 $P(0, x_1, x_2, x_3, 0, \cdots, 0)$. 依此类推,可以得到 $P(0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$,表示如下:

$$\begin{aligned}&P(0, x_1, 0, \cdots, 0) \longrightarrow P(0, x_1, x_2, 0, \cdots, 0) \longrightarrow \\ &P(0, x_1, x_2, x_3, 0, \cdots, 0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow P(0, x_1, x_2, \cdots, x_n).\end{aligned} \tag{3.64}$$

然后,在 $x_2=x_3=\cdots=x_n=0$ 平面上,以(3.63)式为初值解演化方程(3.15)式得到解 $P(t, x_1, 0, \cdots, 0)$,再依上述同样的步骤,对每个 $t$ 作

$$P(t, x_1, 0, \cdots, 0) \longrightarrow P(t, x_1, x_2, 0, \cdots, 0) \longrightarrow$$

$$P(t, x_1, x_2, x_3, 0, \cdots, 0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow P(t, x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

这样,就把 $1+n$ 维的求解问题归结为一系列的 $1+1$ 维求解问题. 在一定条件下,这些 $1+1$ 维的求解问题的解是存在且唯一的,可以用反散射方法或先验估计方法证明这一事实,但由于计算冗长,在此从略. 这里只是证明,这样所得到的 $P(t, x_1, \cdots, x_n)$ 的确满足约束条件(3.12)式和发展方程(3.15)式,其证明如下:

先证明 $P(0, x_1, x_2, x_3, 0, \cdots, 0)$ 不仅在 $x_3=0$ 时满足 $\Delta_{12}=0$, 而且对任意的 $x_3$ 都满足 $\Delta_{12}=0$.

为此,先注意一个恒等式:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\Delta_{1j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_{1l} + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_{lj} + [P_l, \Delta_{1j}] + [P_1, \Delta_{jl}] + [P_j, \Delta_{l1}]. \tag{3.65}$$

这是对 $\Delta_{1j}$, $\Delta_{1l}$, $\Delta_{lj}$ 直接进行微分,再作适当的整理并利用 Jacobi 恒等式而得出的. 再由(3.17)式可知, $\Delta_{lj}$ 能用 $\Delta_{1l}$, $\Delta_{1j}$ 线性表出,所以只要证明 $\Delta_{1i}=0 (i=2, 3)$, 就能得知 $\Delta_{23}=0$. 现取 $l=3$, $j=2$. 利用 $\Delta_{13}=0$, 可得知

$$\frac{\partial}{\partial x_3}[J_1, \Delta_{12}] = \frac{\partial}{\partial x_1}[J_3, \Delta_{12}] + \Delta_{12}\text{ 的线性项}. \tag{3.66}$$

因为 $x_3=0$ 时 $\Delta_{12}=0$, 从方程(3.66)式关于解 $\Delta_{12}$ 的 Cauchy 问题的唯一性可知 $[J_1, \Delta_{12}]=0$. 由于 $\Delta_{12}$ 的对角元均为 0,所以 $\Delta_{12}=0$.

类似地可以证明 $P(0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足 $\Delta_{1l}=0\ (l=3, \cdots, n)$ 和其余的 $\Delta_{ij}=0$, 所以从初始条件 $P_0(x_1)$ 可以唯一地决定 $P(0, x_1, \cdots, x_n)$, 使约束条件(3.12)式在 $t=0$ 时得到满足.

与此类似,可以证明,如果对任何 $t$, $P(t, x_1, \cdots, x_n)$ 满足约束条件(3.12)式,又在平面 $x_2=0, \cdots, x_n=0$ 上它满足发展方程(3.15)式,则对任何$(t, x_1, \cdots, x_n)$,发展方程也能满足. 这样,就证明了把 $1+n$ 维的 Cauchy 问题化为求解一系列的 $1+1$ 维的 Cauchy 问题的这一作法是有效的.

## §3.4　1+2 维可积系统的非线性约束

在本节中我们指出，$n=2$ 时系统(3.1)式可应用于许多常见的 1+2 维非线性可积问题，例如 KP 方程、DS 方程、$N$ 波方程等. 如第 2 章所述，通常这些方程的 Lax 对中不含有谱参数，但通过适当引入 Lax 对的解与位势之间的约束关系，这些 Lax 对可与带谱参数的系统(3.1)式联系起来，这就是非线性约束方法. 这是 1+1 维非线性约束方法[8]在 1+2 维的推广. 在 1+2 维，这个问题首先由文献[11, 58]在研究 KP 方程时提出，然后，在文献[10, 89, 90]等的论述中表明，它可将相当多的 1+2 维非线性可积系统的求解转化为形如(3.1)式的系统的求解. 下面我们分别以 $N$ 波方程和 DSI 方程为例来说明这个问题.

### 3.4.1　$N$ 波方程的非线性约束

我们取 $A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$, $B=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$ 为两个 $N\times N$ 实对角矩阵，$\{a_i\}$ 与 $\{b_j\}$ 是两组互不相同的实常数，$U=(u_{ij})$, $V=(v_{ij})$ 为两个对角元为 0 的 $N\times N$ 矩阵函数，且 $U^*=-U$, $V^*=-V$, 下列线性系统

$$\begin{aligned}\Psi_y&=A\Psi_x+U\Psi,\\ \Psi_t&=B\Psi_x+V\Psi\end{aligned}\tag{3.67}$$

的可积条件所给出的方程正是 $N$ 波方程. 具体来说，此可积条件是

$$\begin{aligned}&[A,V]=[B,U],\\ &U_t-V_y+AV_x-BU_x+[U,V]=0.\end{aligned}\tag{3.68}$$

如果用 $U$ 的分量写出，就是

$$u_{ij,t}=c_{ij}u_{ij,y}+\frac{a_ib_j-a_jb_i}{a_i-a_j}u_{ij,x}+\sum_{k=1}^{N}(c_{ik}-c_{kj})u_{ik}u_{kj}$$

$$(i,j=1,\cdots,N),\tag{3.69}$$

其中

$$u_{ji}=-\overline{u}_{ij}\quad(i\neq j),\quad u_{ii}=0,\quad c_{ij}=\frac{b_i-b_j}{a_i-a_j}.$$

为了与§3.1所给出的Lax组相联系,我们引入如下的线性系统:

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda\Phi + \begin{pmatrix} 0 & iF \\ iF^* & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\ \Phi_y &= \begin{pmatrix} iA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda\Phi + \begin{pmatrix} U & iAF \\ iF^*A & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\ \Phi_t &= \begin{pmatrix} iB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda\Phi + \begin{pmatrix} V & iBF \\ iF^*B & 0 \end{pmatrix}\Phi,\end{aligned} \tag{3.70}$$

其中$\lambda$是添加的谱参数,$I$是$N$阶单位阵,$F$是新引入的一个$x$, $y$, $t$的$N\times s$阶矩阵函数($s\geqslant 1$),(3.70)式右端出现的那些矩阵都是$(N+s)\times(N+s)$阶的,它属于§3.1引入的系统.

(3.70)式的可积条件$\Phi_{xy}=\Phi_{yx}$, $\Phi_{xt}=\Phi_{tx}$给出

$$U_x=[A,\ FF^*],\quad V_x=[B,\ FF^*], \tag{3.71}$$

及

$$F_y=AF_x+UF,\quad F_t=BF_x+VF, \tag{3.72}$$

而$\Phi_{yt}=\Phi_{ty}$给出

$$U_t-V_y+[U,\ V]-AFF^*B+BFF^*A=0. \tag{3.73}$$

**注3.2** (1) 如果将(3.72)式中的$F$看作(3.67)式中的$\boldsymbol{\Psi}$,则(3.72)式就是$N$波方程的Lax对.

(2) 考虑到(3.71)式中的关系成立,(3.73)式即为$N$波方程(3.68)式.

(3) (3.71)式是原来没有的方程,它在$N$波方程的解与它的Lax对的解$F$之间加上了一个约束条件.

从Lax对(3.67)式出发,通过附加约束(3.71)式来得到关于各个自变量的导数全部显式出现的Lax对(3.70)式的方法称为**非线性约束方法**.对于1+1维系统,最初是由文献[8]提出的,这里是在1+2维系统的推广.

### 3.4.2 DSI方程的非线性约束

在(2.21)式中,令$\alpha=1$, $\varepsilon=1$,则有DSI方程

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}u_t = u_{xx} + u_{yy} + u(w_1 - w_2), \\
&w_{1x} - w_{1y} = -(\partial_x + \partial_y)\,|u|^2, \\
&w_{2x} + w_{2y} = (\partial_x - \partial_y)\,|u|^2,
\end{aligned} \tag{3.74}
$$

所相应的 Lax 对是

$$
\begin{aligned}
\Psi_y &= J\Psi_x + U\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Psi_x + \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix}\Psi, \\
\Psi_t &= 2\mathrm{i}J\Psi_{xx} + 2\mathrm{i}U\Psi_x + Q\Psi \\
&= 2\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Psi_{xx} + 2\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix}\Psi_x \\
&\quad + \begin{pmatrix} \mathrm{i}w_1 & \mathrm{i}(u_x + u_y) \\ -\mathrm{i}(\bar{u}_x - \bar{u}_y) & \mathrm{i}w_2 \end{pmatrix}\Psi.
\end{aligned} \tag{3.75}
$$

与 $N$ 波方程类似,我们引入线性系统

$$
\begin{aligned}
&\Phi_x = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda I & \mathrm{i}F \\ \mathrm{i}F^* & 0 \end{pmatrix}\Phi, \quad \Phi_y = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda J + U & \mathrm{i}JF \\ \mathrm{i}F^* J & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\
&\Phi_t = V\Phi = \sum_{j=0}^{2} \begin{pmatrix} W_j & X_j \\ -X_j^* & Z_j \end{pmatrix}\lambda^{2-j}\Phi,
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

其中 $\lambda$ 是添加的谱参数,$F$ 是新引入的 $2\times s\ (s\geqslant 1)$ 阶矩阵值函数,$W_j$,$X_j$,$Z_j$ 分别是待定的 $2\times 2$,$2\times s$,$s\times s$ 阶矩阵值函数,从而上式右端的系数矩阵都是 $(2+s)\times(2+s)$ 阶的. 通过计算(3.76)式的可积条件可以确定 $W_j$,$X_j$,$Z_j$,并得到 $U$,$F$ 之间的相互关系.

现在特别选取

$$
W_0\,|_{U=F=0} = -2\mathrm{i}J, \quad W_1\,|_{U=F=0} = 0, \quad W_2\,|_{U=F=0} = 0,
$$

则由(3.76)式的可积条件,得

$$
V = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}J\lambda^2 - 2U\lambda + W_2 & -2\mathrm{i}JF\lambda - 2JF_x - 2UF \\ -2\mathrm{i}F^* J\lambda + 2F_x^* J - 2F^* U & -2\mathrm{i}F^* JF \end{pmatrix},
$$

(3.77)

其中

$$W_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \mid u \mid^2 + 2\mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}u_y \\ \mathrm{i}\overline{u}_y & -\mathrm{i} \mid u \mid^2 - 2\mathrm{i}q_2 \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

$q_1$, $q_2$ 是新引入的函数. 通过计算(3.76)式的可积条件,得到 $U$, $F$, $q_1$, $q_2$ 满足的方程

$$\begin{aligned} & F_y = JF_x + UF, \\ & F_t = 2\mathrm{i}JF_{xx} + 2\mathrm{i}UF_x + \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mid u \mid^2 + 4q_1 & u_x + u_y \\ -\overline{u}_x + \overline{u}_y & -\mid u \mid^2 - 4q_2 \end{pmatrix} F, \end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned} & -\mathrm{i}u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2 \mid u \mid^2 u + 4(q_1 + q_2)u, \\ & q_{1x} - q_{1y} = -\frac{1}{2}(\mid u \mid^2)_x, \\ & q_{2x} + q_{2y} = -\frac{1}{2}(\mid u \mid^2)_x, \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$(FF^*)^{\mathrm{diag}} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, \quad [J, (FF^*)^{\mathrm{off}}] = U_x. \tag{3.81}$$

如果将(3.79)式中的 $F$ 看作(3.75)式中的 $\Psi$,则(3.79)式就是 DSI 方程的 Lax 对,而(3.75)式中的

$$w_1 = \mid u \mid^2 + 4q_1, \quad w_2 = -\mid u \mid^2 - 4q_2. \tag{3.82}$$

(3.80)式就是 DSI 方程(3.74)式,而(3.81)式是非线性约束.

### 3.4.3 DSI 方程的孤立子解

下面我们通过对(3.76)式作 Darboux 变换来得到 DSI 方程的孤立子解. 由于(3.76)式的可积条件(3.79)式、(3.80)式、(3.81)式比 DSI 方程及其 Lax 对更多,因而这里的方法所能得到的只是 DSI 方程的部分解,但是,我们仍可得到孤立子解,包括局域孤立子解(即在无穷远处处趋于零的孤立子解)和非局域孤立子解. 我们在这里考虑 $s=1$ 和 $s=2$ 两种情况.

(1) $s=1$ 时的非局域孤立子解

取

$$\lambda_1=\lambda_0\quad(\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0),\quad \lambda_2=\lambda_3=\bar{\lambda}_0,$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},\tag{3.83}$$

再取 Lax 组(3.76)式的解$\{h_\alpha\}$,使得当 $\lambda_\alpha\neq\lambda_\beta=0$ 时 $h_\alpha^* h_\beta=0$. 记 $H=(h_1,h_2,h_3)$, 且

$$h_1=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix},$$

则利用正交关系,所得的 $S=H\Lambda H^{-1}$ 与 $h_2$, $h_3$ 的选取无关,用分量写出来,就是

$$S_{ij}=\bar{\lambda}_0\delta_{ij}+(\lambda_0-\bar{\lambda}_0)\frac{\xi_i\bar{\xi}_j}{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+|\xi_3|^2},\tag{3.84}$$

从而经过 Darboux 阵 $\lambda I-S$ 的作用,得

$$\begin{aligned}
u'&=u+2\kappa\xi_1\bar{\xi}_2,\\
w_1'&=w_1-2\kappa(u\bar{\xi}_1\xi_2+\bar{u}\xi_1\bar{\xi}_2)-2\kappa(F_1\bar{\xi}_1\xi_3+\bar{F}_1\xi_1\bar{\xi}_3)\\
&\quad-4\kappa^2|\xi_1|^2(|\xi_2|^2+|\xi_3|^2),\\
w_2'&=w_2+2\kappa(u\bar{\xi}_1\xi_2+\bar{u}\xi_1\bar{\xi}_2)+2\kappa(F_2\bar{\xi}_2\xi_3+\bar{F}_2\xi_2\bar{\xi}_3)\\
&\quad+4\kappa^2|\xi_2|^2(|\xi_1|^2+|\xi_3|^2),
\end{aligned}\tag{3.85}$$

其中

$$\kappa=\frac{\mathrm{i}(\lambda_0-\bar{\lambda}_0)}{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+|\xi_3|^2},\tag{3.86}$$

而相应的

$$F'=F+\kappa\bar{\xi}_3\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}.\tag{3.87}$$

特别是,当 $u=0$, $F=0$, $w_2=0$ 时,可取

$$\xi_1=c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0(x+y)-2\mathrm{i}\lambda_0^2 t},\quad \xi_2=c_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0(x-y)+2\mathrm{i}\lambda_0^2 t},\quad \xi_3=c_3,\tag{3.88}$$

式中 $c_1$, $c_2$, $c_3$ 是复常数. 这时得到线状单孤立子解:

$$u' = \frac{-4\nu c_1 \bar{c}_2 e^{2i\mu y - 4i(\mu^2-\nu^2)t}}{|c_1|^2 e^{-2\nu y + 8\mu\nu t} + |c_2|^2 e^{2\nu y - 8\mu\nu t} + |c_3|^2 e^{2\nu x}} \tag{3.89}$$

$$(\lambda_0 = \mu + i\nu,\ \mu,\ \nu \neq 0).$$

当 $t$ 固定时,沿直线 $y = ax + b (a \neq 0)$ 的两个方向,DSI 方程的这组解渐近于 0,而在 $y =$ 常数的两个方向上分别渐近于 0 和一个非零常数. 它的波峰沿 $y$ 方向的运动速度为 $4\mathrm{Re}(\lambda_0)$. 多次使用 Darboux 变换就可给出多孤立子解.

图 3.6~图 3.10 给出线状双孤立子解的相互作用.

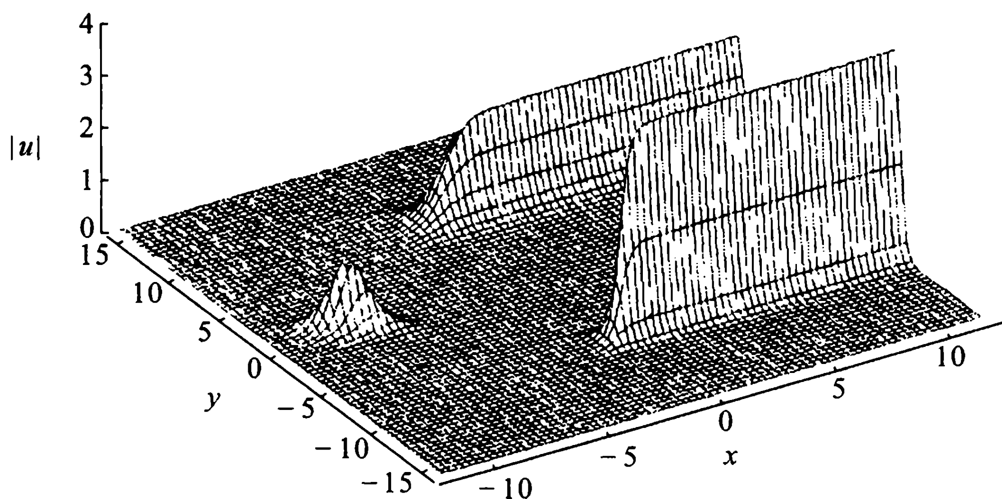



**图 3.6 DSI 方程的线状双孤立子解, $t=-2$**

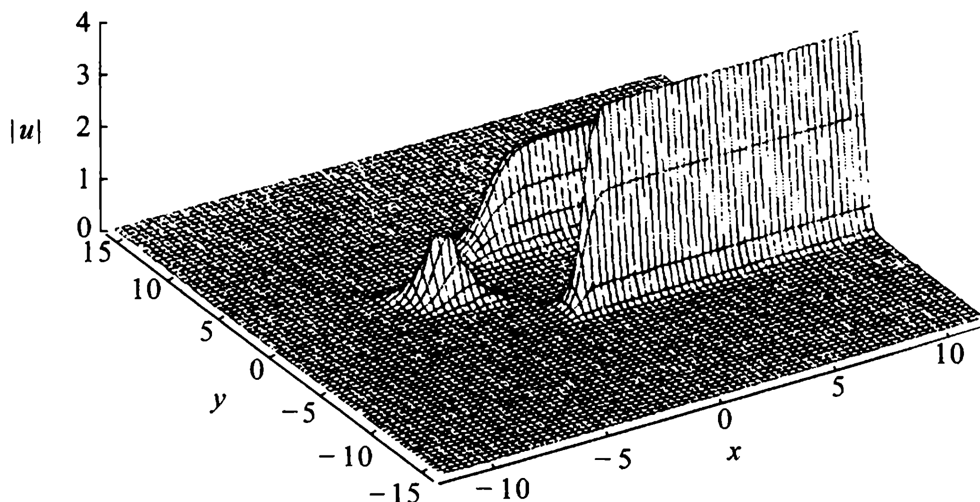



**图 3.7 DSI 方程的线状双孤立子解, $t=-1$**

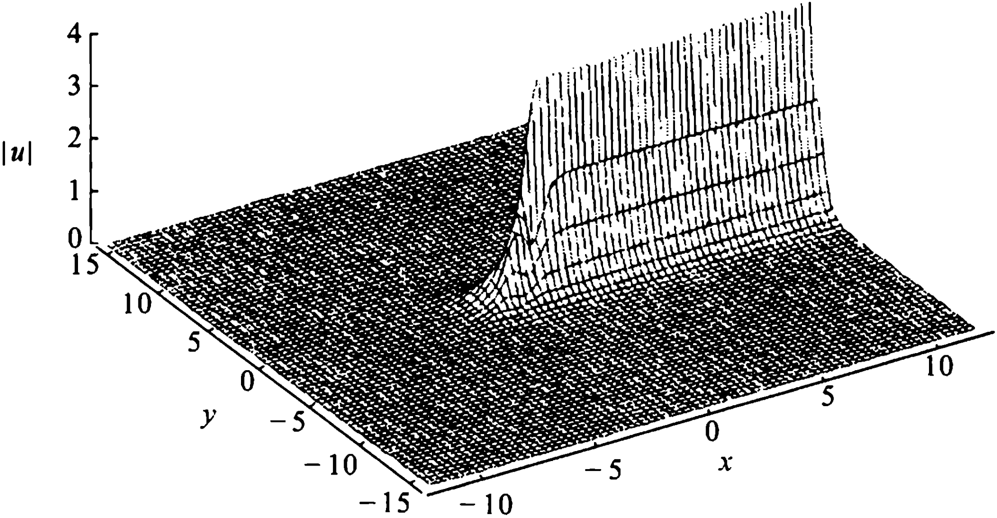



图 3.8 DSI 方程的线状双孤立子解，$t=0$

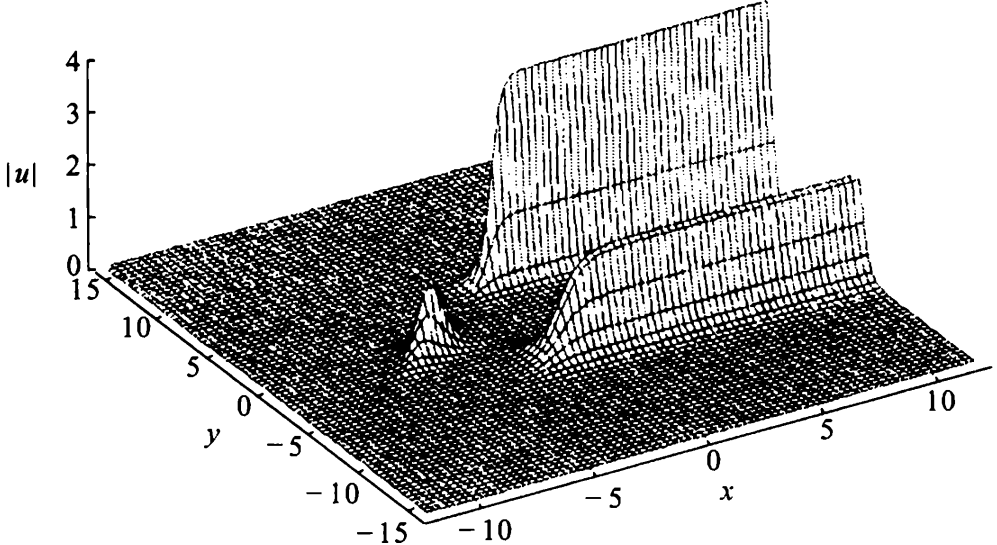



图 3.9 DSI 方程的线状双孤立子解，$t=1$

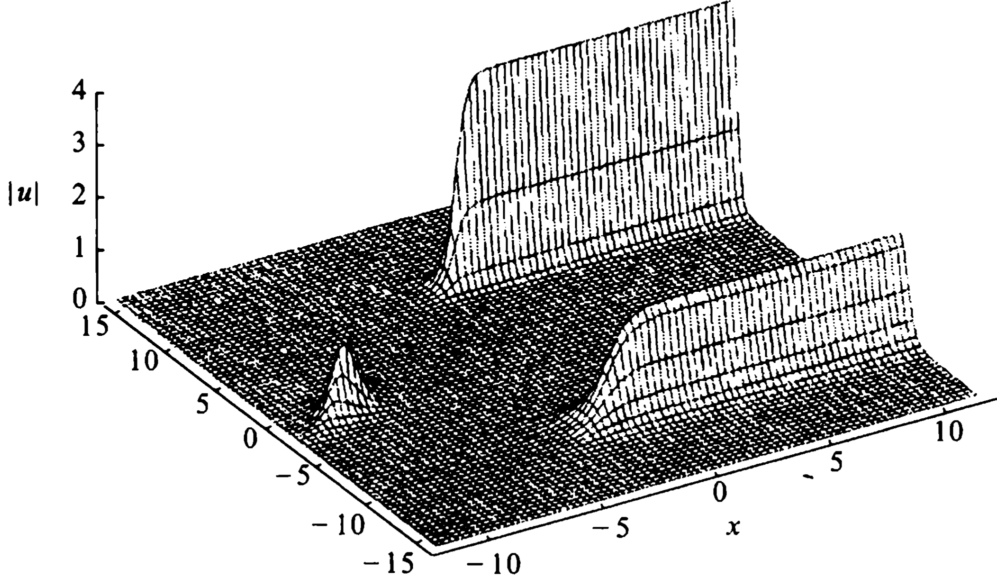



图 3.10 DSI 方程的线状双孤立子解，$t=2$

(2) $s = 2$ 时的局域孤立子解

取 $u = 0$, $F = 0$, $W_2 = 0$. 这时，可作出局域解，作法如下：

取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \bar{\lambda}_0$ $(\mathrm{Im}\lambda_0 \neq 0)$，作

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_0 & & \\ & & \bar{\lambda}_0 & \\ & & & \bar{\lambda}_0 \end{pmatrix}, \tag{3.90}$$

$$H = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0(x+Jy)-2\mathrm{i}J\lambda_0^2 t} & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}_0(x+Jy)-2\mathrm{i}J\bar{\lambda}_0^2 t}C^* \\ C & I \end{pmatrix},$$

其中 $C$ 是一个 $2\times2$ 常值阵. 利用(3.90)式可作出 Darboux 阵 $\lambda I - H\Lambda H^{-1}$，从而可得到单孤立子解. 经过计算，可得到单孤立子解的具体形式为：

$$u' = \frac{2bc_{12}}{|\det C|\cosh(2bx+\phi_1)+c_1c_2\cosh(2b(y-4at)+\phi_2)}, \tag{3.91}$$

其中 $a = \mathrm{Re}\,\lambda_0$, $b = \mathrm{Im}\lambda_0$;

$$\begin{aligned} &c_1 = \sqrt{|C_{11}|^2+|C_{21}|^2},\ c_2 = \sqrt{|C_{12}|^2+|C_{22}|^2}, \\ &c_{12} = \bar{C}_{11}C_{12}+\bar{C}_{21}C_{22}, \\ &\phi_1 = \ln|\det C|,\ \phi_2 = \ln(c_1/c_2). \end{aligned} \tag{3.92}$$

如果 $\det C \neq 0$，这个解是局域的，也就是在无穷远处处趋于零.

进一步，选取

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0^{(j)} & & & \\ & \lambda_0^{(j)} & & \\ & & \bar{\lambda}_0^{(j)} & \\ & & & \bar{\lambda}_0^{(j)} \end{pmatrix}, \tag{3.93}$$

$$H = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0^{(j)}(x+Jy)-2\mathrm{i}J\lambda_0^{(j)2} t} & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}_0^{(j)}(x+Jy)-2\mathrm{i}J\bar{\lambda}_0^{(j)2} t}C^{(j)*} \\ C^{(j)} & I \end{pmatrix},$$

式中 $\lambda_0^{(j)} \neq \lambda_0^{(k)} (j \neq k)$, $\lambda_0^{(j)} \neq \bar{\lambda}_0^{(k)}$, 可以作 $m$ 阶 Darboux 阵,从而得到多孤立子解 $U^{[m]} = [U_{ij}^{[m]}]$. 虽然 $U^{[m]}$ 的具体形式十分复杂,但可以研究当 $(x, y) \to \infty$ 时的渐近性质与 $t \to \infty$ 时的渐近性质. 对于 $(x, y) \to \infty$ 时的渐近性质,有如下定理:

**定理 3.3** $(x, y)$沿平面上任一直线趋于无穷大时,$U_{ij}^{[m]}$ 趋于零.

为了考虑 $t \to \infty$ 的渐近性质,我们在以速度为$(v_x, v_y)$的坐标系中讨论. 令 $\xi = x - v_x t$, $\eta = y - v_y t$, 则有如下定理:

**定理 3.4** 至多存在 $m^2$ 对$(v_x, v_y)$, 使得当 $\xi$, $\eta$ 有界时,

$$\lim_{t \to \pm\infty} U_{ij}^{[m]}(\xi + v_x t, \eta + v_y t, t) = U_{ij}^{[m]\pm}(v_x, v_y)(\xi, \eta), \quad (3.94)$$

其中的渐近解 $U_{ij}^{[m]\pm}(v_x, v_y) \neq 0$, 而对其他所有的$(v_x, v_y)$, 有

$$\lim_{t \to \pm\infty} U_{ij}^{[m]}(\xi + v_x t, \eta + v_y t, t) = 0. \quad (3.95)$$

这两个定理的证明相当繁复,在此从略. 请参阅文献[93].

**注 3.3** 从定理 3.4 看到,在一般情况下,$U_{ij}^{[m]}$ 在 $t \to \pm\infty$ 时渐近解具有 $m^2$ 个峰,但在满足某些条件时,有些峰前面的系数为 0,因而峰的个数就小于 $m^2$.

下面图 3.11～图 3.19 显示了三组双孤立子解的演化性质. 其中第一组(图 3.11～图 3.13)的两个波峰经相互作用后仍变为两个波峰,第二组(图 3.14～图 3.16)的四个波峰经相互作用后变成了两个波峰,第三组(图 3.17～图 3.19)的四个波峰经相互作用后仍变为四个波峰.

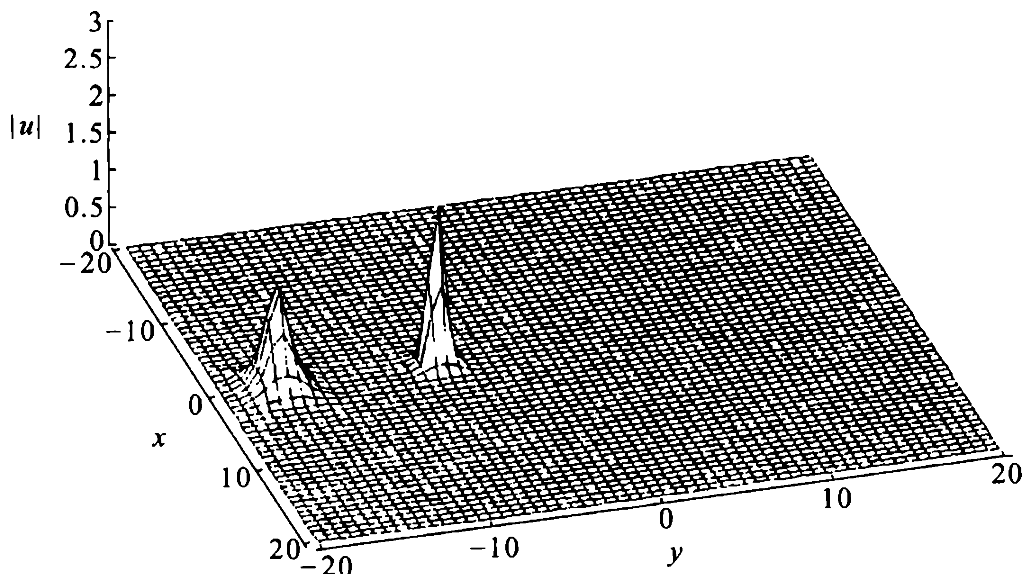



**图 3.11 DSI 方程的局域双孤立子解(1), $t=-2$**

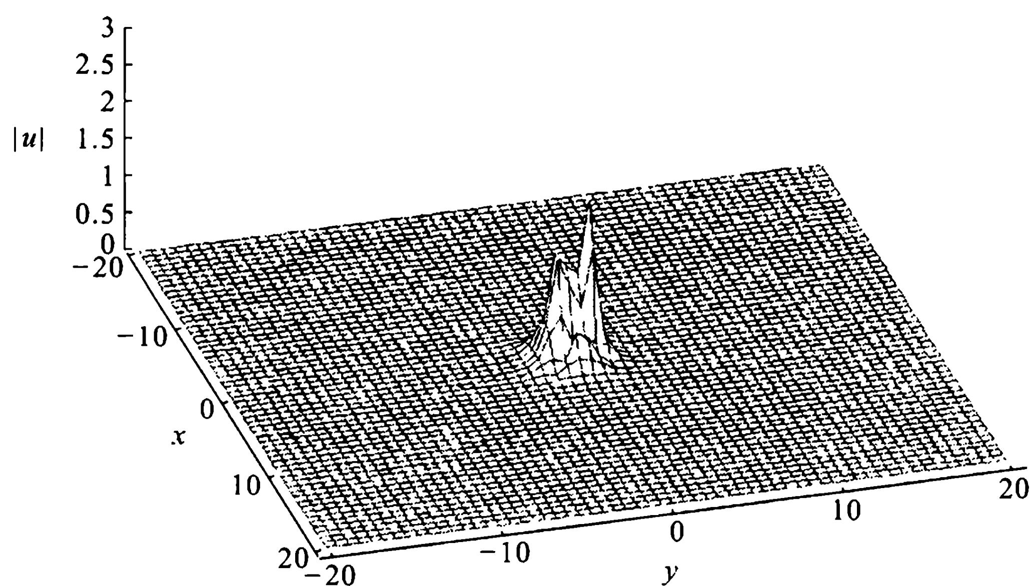



图 3.12　DSI方程的局域双孤立子解(1)，$t=0$

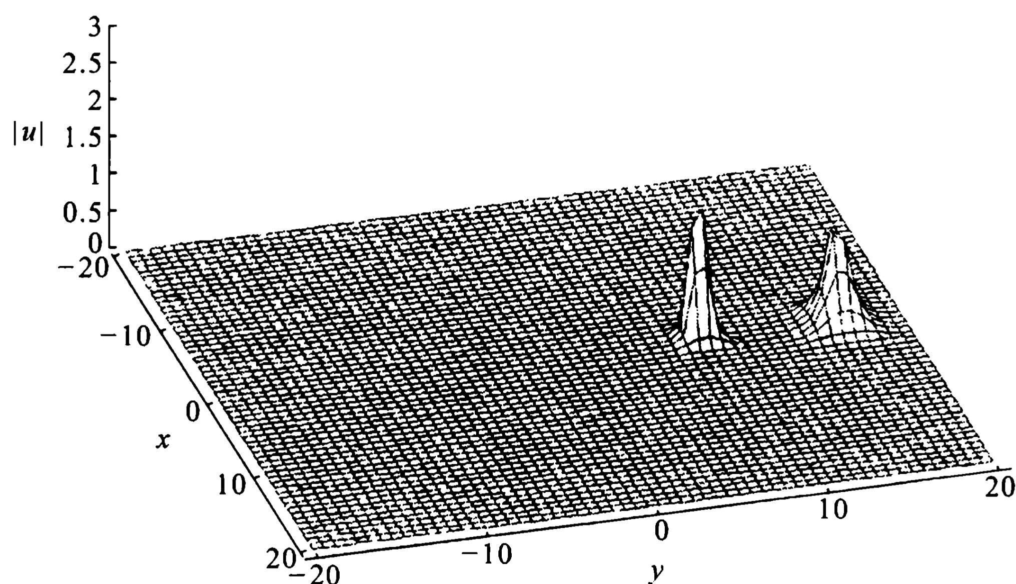



图 3.13　DSI方程的局域双孤立子解(1)，$t=2$

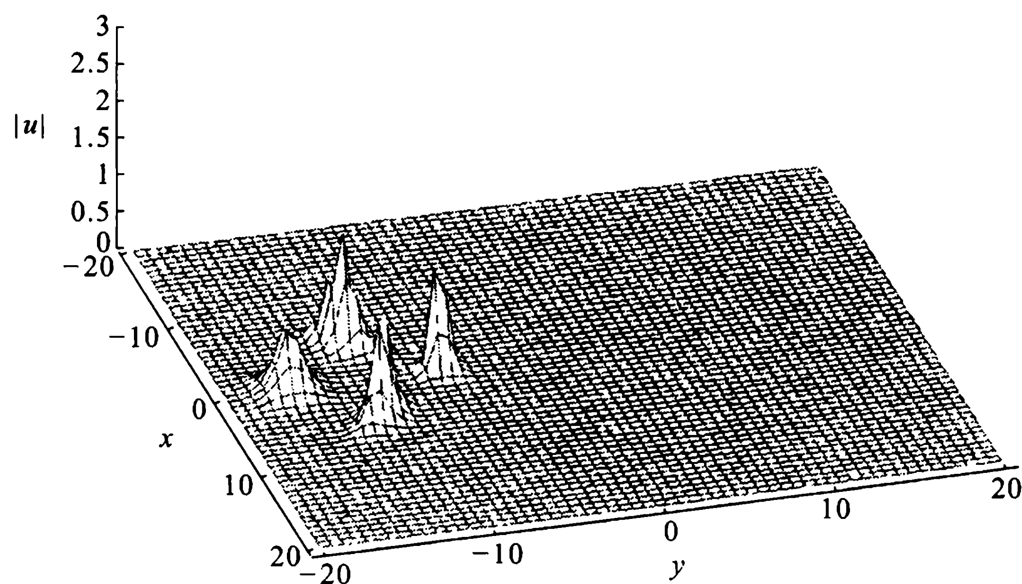



图 3.14　DSI方程的局域双孤立子解(2)，$t=-2$

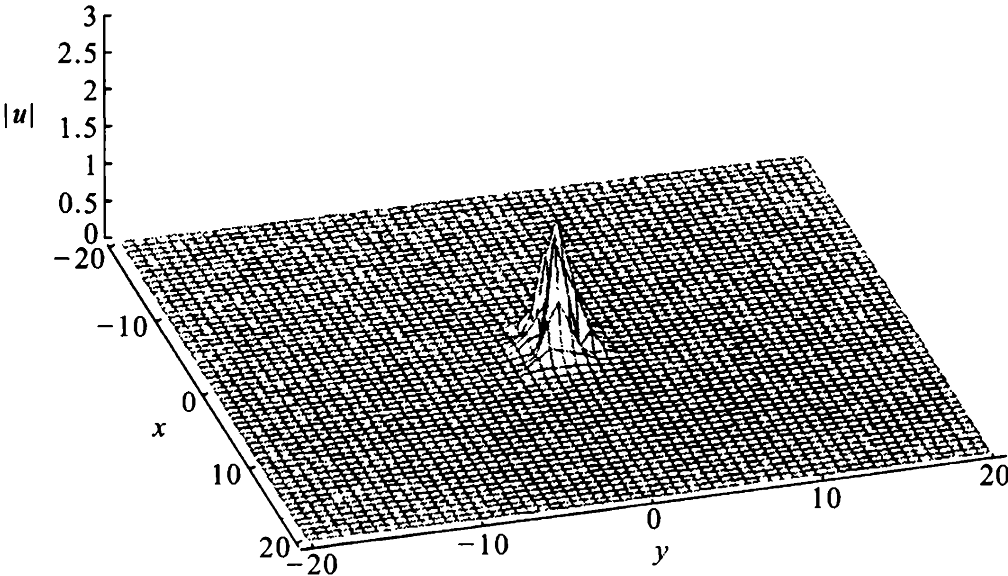



图 3.15 DSI 方程的局域双孤立子解(2), $t=0$

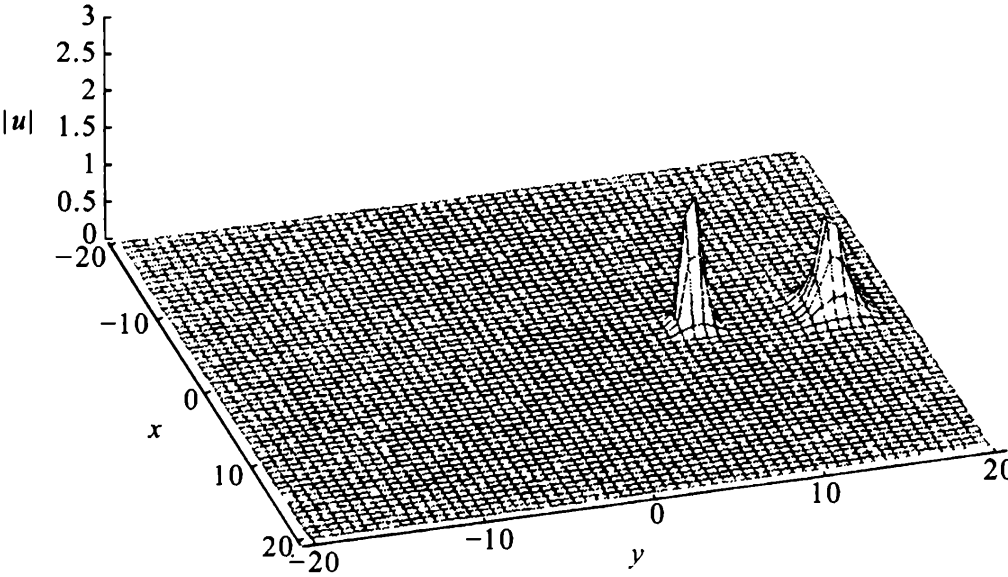



图 3.16 DSI 方程的局域双孤立子解(2), $t=2$

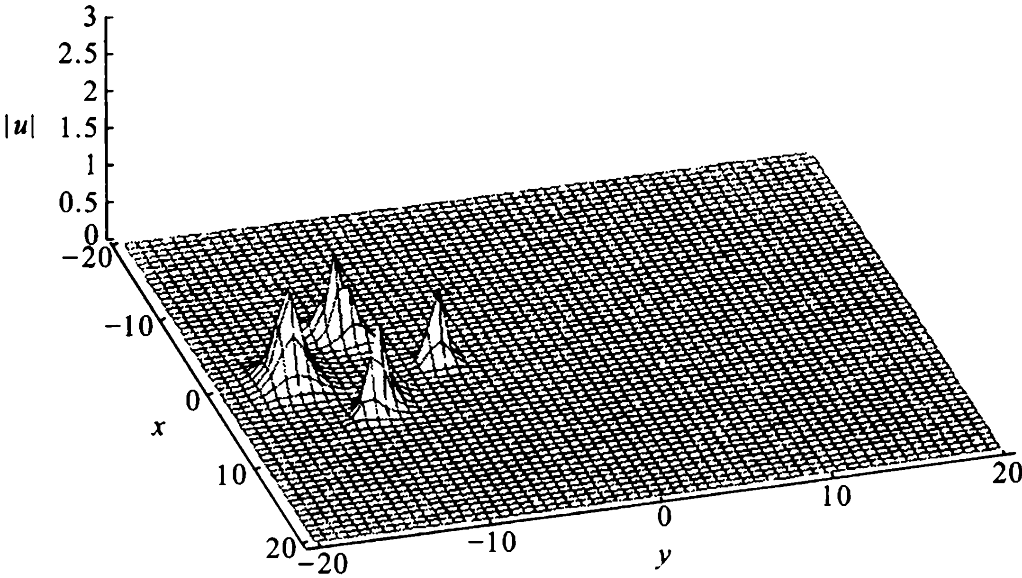



图 3.17 DSI 方程的局域双孤立子解(3), $t=-2$

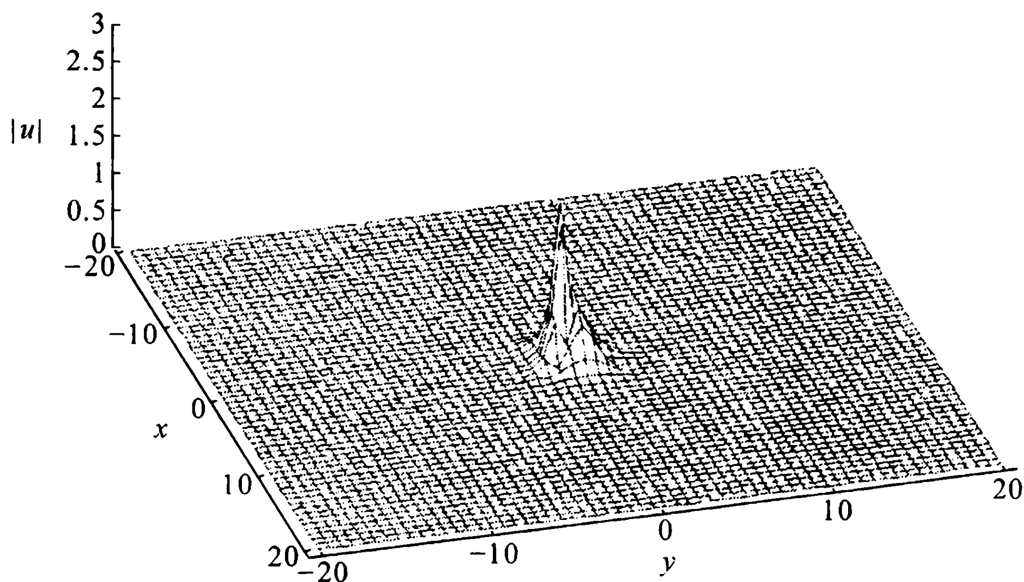



**图 3.18　DSI 方程的局域双孤立子解(3)，$t=0$**

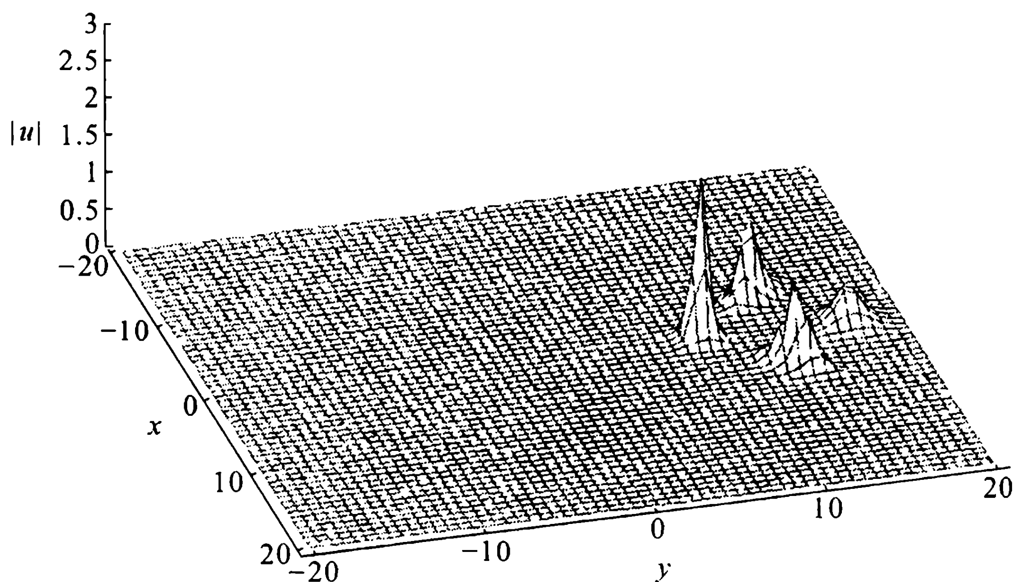



**图 3.19　DSI 方程的局域双孤立子解(3)，$t=2$**

**注 3.4**　对于§2.2 中讨论过的 AKNS 系统(2.15)式，在一般情况下并不一定具有整体解，当然也不一定具有整体局域解. 但在文献[93]中证明了，如果 $J$ 的对角元都是实数，并且(2.15)式中的 $P$ 满足 $P^*=-P$，则定理 3.3 仍成立. 但是，定理 3.4 成立需要一个使各孤立子速度互不相等的条件，这个条件与 $J$ 的对角元 $J_1$，…，$J_N$ 及谱参数 $\lambda_0^{(1)}$，…，$\lambda_0^{(m)}$ 有关. 对 DSI 方程，此条件满足；而对 $N$ 波方程，此条件不满足，因为 $N$ 波方程的所有孤立子以相同的速度运动.

**注 3.5**　对于 $N$ 波方程，虽然 $t\to\pm\infty$ 时的渐近解不会分裂为若干简单的峰，但当参数的间距“充分大”时，用上述方法作出的解 $U_{ij}^{[m]}$ 的各

分量仍会分裂为至多 $m^2$ 个简单的峰. 这里不详细讨论这个问题,请参阅文献[94].

**注 3.6** 上面只讨论了 $s=1$ 的非局域孤立子解和 $s=2$ 的局域孤立子解. 另一方面,通过对 $s=1$ 的 Lax 对作多次 Darboux 变换,只要参数取得适当,也可以得到局域孤立子解,而且比上面由 $s=2$ 得到的局域孤立子解更广泛. 对于 DSI 方程,这样的解依赖于两个整数 $m$, $n$,称为 $(m, n)$ 孤立子解,而对 $N$ 波方程,解则依赖于 $N$ 个整数. 具体内容请参阅文献[95].

## §3.5 $\mathbf{R}^n$ 上的一个约化系统

作为一般理论的一个特例,现在考虑 $\mathbf{R}^n$ 上的一个特殊的 AKNS 系统. 记

$$e_1=\begin{pmatrix}1&&&&\\&0&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&&&&\\&1&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix},\tag{3.96}$$

$$\cdots,\quad e_n=\begin{pmatrix}0&&&&\\&0&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}$$

为 $n$ 个 $n$ 阶对角阵,作 $2n\times 2n$ 阵

$$E_i=\begin{pmatrix}e_i&0\\0&-e_i\end{pmatrix},\tag{3.97}$$

考虑系统

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}=(\lambda E_i+P_i)\Psi,\tag{3.98}$$

这里 $P_i$ 是实的 $2n\times 2n$ 阵. 注意,如果 $a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 $n$ 个非零实

数( $|a_i|$ 互不相同),则 $\sum a_iE_i$ 有不相同的对角元,所以存在 $2n\times 2n$ 阵 $P$,使

$$P_i=[P,\ E_i]. \tag{3.99}$$

我们对 $P$ 加上特殊的要求,记

$$P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}, \tag{3.100}$$

这里 $P_{11}$, $P_{12}$, $P_{21}$, $P_{22}$ 为 $n\times n$ 阵,我们约定

$$P_{11}=-P_{22}\ \text{为对称;}\quad P_{12}=-P_{21}\ \text{为反称.} \tag{3.101}$$

因而这是一个有较强的约束的 AKNS 系统. 这个系统是从一个几何问题[5]中产生的. 我们现在作它的 Darboux 变换[37]. 根据一般理论( § 3.2),取 $\lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{2n})$,$\psi_a$ 为相应于特征值 $\lambda_a$ 的列向量解,令

$$H=[\psi_1,\ \cdots,\ \psi_{2n}], \tag{3.102}$$

$$S=H\Lambda H^{-1}, \tag{3.103}$$

则 $\lambda I-S$ 是 Darboux 阵;Darboux 变换 $(P,\ \Psi)\to(P',\ \Psi')$ 为

$$\Psi'=(\lambda I-S)\Psi,\quad P'=P-S. \tag{3.104}$$

为使 $P'$ 仍然满足约束条件,即具有特殊的形式(3.100)式和(3.101)式,我们需要有特殊选取的 $\lambda_a$ 和 $\psi_a$. 下面先证明一个引理:

**引理 3.3** 设 $P$ 满足(3.101)式,又

$$\Psi(\lambda_0)=\begin{pmatrix}\psi^1(\lambda_0)\\ \psi^2(\lambda_0)\end{pmatrix} \tag{3.105}$$

是(3.98)式相应于 $\lambda=\lambda_0$ 的列向量解,式中 $\psi^1$, $\psi^2$ 均为 $n$ 元的列向量,则

$$\widetilde{\Psi}(\lambda_0)=\begin{pmatrix}\psi^2(\lambda_0)\\ \psi^1(\lambda_0)\end{pmatrix} \tag{3.106}$$

是(3.98)式相应于 $\lambda=-\lambda_0$ 的列向量解.

**证明** 设 $P_{11}=F$, $P_{21}=G$, 则

$$P_i=\begin{pmatrix}[F,\ e_i] & \{G,\ e_i\}\\ \{G,\ e_i\} & [F,\ e_i]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_i & G_i\\ G_i & F_i\end{pmatrix}, \tag{3.107}$$

式中

$$F_i = [F,\ e_i],\ G_i = \{G,\ e_i\} = Ge_i + e_iG. \tag{3.108}$$

方程(3.98)式(作为列向量的方程)就可以写作

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi^1}{\partial x_i} &= \lambda e_i\psi^1 + F_i\psi^1 + G_i\psi^2,\\ \frac{\partial\psi^2}{\partial x_i} &= -\lambda e_i\psi^2 + G_i\psi^1 + F_i\psi^2,\end{aligned} \tag{3.109}$$

这个方程组在变换

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix} \to \widetilde{\Psi} = \begin{pmatrix}\psi^2\\ \psi^1\end{pmatrix},\ \lambda \to -\lambda \tag{3.110}$$

下不变. 引理证毕. ■

我们选取非零实数 $\mu$,令

$$\lambda_i = \mu,\ \lambda_{n+i} = -\mu \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{3.111}$$

取列向量解

$$\psi_i = \psi_i(\mu), \quad \psi_{n+i} = \widetilde{\psi}_i, \tag{3.112}$$

$\psi_i$ 是 $n$ 个线性无关的列向量,从而 $\widetilde{\psi}_i$ 也线性无关. 利用方程(3.109)式及 $P_i^* = -P_i$ 显然可见

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_\alpha^*\psi_\beta) = 0 \quad (\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta) \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n). \tag{3.113}$$

所以如

$$\psi_\alpha^*\psi_\beta = 0 \quad (\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta) \tag{3.114}$$

在一点成立,则处处成立. 在后文中我们要证明,可选取线性无关的 $\psi_\alpha$ 使(3.112)式和(3.114)式成立.

由 $S$ 的作法可知, $SH - H\Lambda = 0$, 即

$$S\psi_\beta = \lambda_\beta\psi_\beta,\ \psi_\gamma^* S^* = \lambda_\gamma\psi_\gamma^*, \tag{3.115}$$

因而

$$\psi_\gamma^* S^* S\psi_\beta = \lambda_\beta\lambda_\gamma\psi_\gamma^*\psi_\beta. \tag{3.116}$$

在 $\lambda_\beta \neq \lambda_\gamma$ 时, $\psi_\gamma^*\psi_\beta = 0$; 在 $\lambda_\beta = \lambda_\gamma$ 时, $\lambda_\beta\lambda_\gamma = \mu^2$, 所以

$$\psi_\gamma^* S^* S\psi_\beta = \mu^2\psi_\gamma^*\psi_\beta \tag{3.117}$$

对一切$\beta$及$\gamma$成立,从而$S^* S=\mu^2 I$. 同时,

$$\psi_\gamma^* (S^* - S)\psi_\beta = (\lambda_\gamma - \lambda_\beta)\psi_\gamma^* \psi_\beta = 0, \tag{3.118}$$

所以这样作出的$S$满足

$$S^* = S, \quad S^* S = \mu^2 I. \tag{3.119}$$

如把$S$写成

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (S_{ab}(a,\ b=1,\ 2)\text{为}n\times n\text{阵}), \tag{3.120}$$

由于$S^* = S$, 所以$S_{11}$和$S_{22}$为对称的, 且$S_{12} = S_{21}^*$. 又因为$S = H\Lambda H^{-1}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & -\mu I \end{pmatrix}$, 从$H$的构成可以知道

$$S_{11} = -S_{22}, \quad S_{12} = -S_{21}. \tag{3.121}$$

从而可见,阵$S$满足阵$P$的条件(3.100)式和(3.101)式,从而$P' = P - S$也满足这个约束条件. 余下来只需证明,可以选取列向量$\psi_a(\lambda)$, 使它们满足(3.114)式并且线性无关. 实际上,只需取好它们的初值,使它们线性无关并满足(3.114)式就可以了. 为此,看阵$S$的性质. 由$S^* S = \mu^2 I$可见

$$S_{11}^2 - S_{12}^2 = \mu^2 I, \quad [S_{12},\ S_{11}] = 0. \tag{3.122}$$

记

$$\sigma = \mu^{-1}(S_{11} + S_{12}), \tag{3.123}$$

则

$$\sigma^* = \mu^{-1}(S_{11} - S_{12}), \tag{3.124}$$

显然有$\sigma^* \sigma = I$, 即$\sigma$是$n$阶正交阵.

现取$\sigma^0$为任意给定的常值正交阵,作对称阵和反称阵

$$S_{11}^0 = \frac{\mu}{2}(\sigma^0 + \sigma^{0*}), \quad S_{12}^0 = \frac{\mu}{2}(\sigma^0 - \sigma^{0*}), \tag{3.125}$$

显然有

$$(S_{11}^0)^2 - (S_{12}^0)^2 = \mu^2 I, \quad [S_{12}^0,\ S_{11}^0] = 0 \tag{3.126}$$

成立. 令

$$S^0 = \begin{pmatrix} S_{11}^0 & S_{12}^0 \\ -S_{12}^0 & -S_{11}^0 \end{pmatrix}, \tag{3.127}$$

则 $S^0$ 为对称阵. 由 $S^{0*}S^0=(S^0)^2=\mu^2 I$ 知 $S^0$ 的特征值为 $\pm\mu$. 并且易见，若 $\psi^0$ 为以 $\mu$ 为特征值的特征向量，则 $\tilde{\psi}^0$ 为以 $-\mu$ 为特征值的特征向量，所以若记以 $\mu$ 为特征值的线性无关的特征向量为 $\psi_i^0$，再作 $\tilde{\psi}_i^0$，它就是以 $-\mu$ 为特征值的特征向量，从而 $\psi_i^0$ 和 $\tilde{\psi}_i^0$ 构成 $2n$ 个线性无关的向量组 $\psi_\alpha^0$. 以它们为初值，就得到所需要的 $\psi_\alpha$，因而 $S$ 的构作也得以完成，即满足约化要求的 Darboux 阵也构作完成.

**定理 3.5** 保持 $P$ 的特性(3.101)式的 Darboux 变换是存在的，并以上述特殊构作的 $S$ 来实现.

**注 3.7** (3.98)式还可以扩充为

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}=\left(\lambda E_i+P_i+\frac{Q_i}{\lambda}\right)\Psi, \tag{3.128}$$

Darboux 变换的方法仍然有效，这时 $Q_i$ 的变换规则为

$$Q_i'=SQ_iS^{-1}. \tag{3.129}$$

利用(3.98)式和(3.128)式的 Darboux 阵，可以解决文献[5]中的几何问题，给出其中 Bäcklund 变换的显式解.

## §3.6 广义自对偶杨-Mills 流

杨-Mills 方程是理论物理中最重要的方程之一，它刻画了自然界的几种基本的相互作用. 自对偶杨-Mills 方程(SDYM)是从属于杨-Mills 方程的一个偏微分方程组，它在 4 维流形的微分拓扑的研究中有特殊意义. 此外，从 SDYM 方程还可化约出许多孤立子方程. R. S. Ward 曾认为，所有的孤立子方程都可以从它的化约而导出. 我们在此不拟系统叙述杨-Mills 的理论，只是从孤立子理论的角度叙述它的一组推广，说明 Darboux 变换可以应用于这种广义的 SDYM 流，并且说明它们可以化约到 AKNS 系统.

### 3.6.1 广义 SDYM 流

先对自对偶杨-Mills 场作一非常简略的介绍.

设$G$为由矩阵所成的Lie群,$\mathfrak{g}$为其Lie代数. 设$\mathbf{R}^4$具欧氏度量

$$ds^2=\eta^{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\quad(\eta^{ij}=\delta^{ij},\text{和号已省略}),\tag{3.130}$$

$A_i$是取值于Lie代数$\mathfrak{g}$的一组函数,称为**规范势**. 二阶反称张量

$$F_{ij}\doteq\partial_iA_j-\partial_jA_i+[A_i,A_j]\tag{3.131}$$

称为规范场的**强度**. 如果$A_i$满足杨-Mills方程

$$\eta^{jk}\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k}+[A_k,F_{ij}]\right)=0,\tag{3.132}$$

则由$A_i$所定义的规范场称为**杨-Mills场**. 变换$A_i'=G(x)A_iG(x)^{-1}-(\partial_iG(x))G(x)^{-1}$称为**规范变换**,这里$G(x)$是取值于群$G$的函数. 规范变换不改变规范场的物理本质,特别是使杨-Mills方程不变. 规范场强$F$有其对偶$*F$,其定义为

$$(*F)_{ij}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\eta^{ka}\eta^{lb}F_{ab},\tag{3.133}$$

这里

$$\varepsilon_{ijkl}=\begin{cases}1, & (i,j,k,l)\text{是}(1,2,3,4)\text{为偶排列时};\\-1, & (i,j,k,l)\text{是}(1,2,3,4)\text{为奇排列时};\\0, & \text{其他情形},\end{cases}\tag{3.134}$$

即

$$\begin{aligned}&(*F)_{12}=F_{34},\quad(*F)_{23}=F_{14},\quad(*F)_{31}=F_{24},\\&(*F)_{34}=F_{12},\quad(*F)_{14}=F_{23},\quad(*F)_{24}=F_{31}.\end{aligned}\tag{3.135}$$

如果$*F=F$, 即

$$F_{12}=F_{34},\quad F_{23}=F_{14},\quad F_{31}=F_{24},\tag{3.136}$$

则此规范场称为**自对偶的杨-Mills场**(SDYM),这时杨-Mills方程一定满足. 如果$*F=-F$成立,则规范场称为**反自对偶**的. 改变时空的取向,自对偶性和反自对偶性可相互转变,因而只讨论自对偶性就足够了.

$\mathbf{R}^4$上的SDYM可以复化为$\mathbf{C}^4$上的规范场,也可以对$\mathbf{R}^{2,2}$的度量,即

$$ds^2=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2-\mathrm{d}x_3^2-\mathrm{d}x_4^2\tag{3.137}$$

作自对偶的杨-Mills 规范场. 在文献[73]中将它扩充到 $\mathbf{R}^{4n}$ 的情形. 我们要叙述的是它进一步的推广[32, 33].

设 $(x, p)=(x_1, \cdots, x_n; p_1, \cdots, p_n)$ 是空间 $\mathbf{R}^{2n}(n\geqslant 2)$ 的实坐标, $A_i(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ 是 $(x, p)$ 的一组 $N\times N$ 矩阵值的(实值或复值)函数. 考察 Lax 组

$$L_i\Psi\equiv\left(\frac{\partial}{\partial p_i}-\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Psi=-A_i\Psi, \tag{3.138}$$

式中 $\Psi$ 为 $N\times N$ 阵,$\lambda$ 为谱参数,它出现在 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 的系数上. (3.138)式的可积条件是

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_j}-\frac{\partial A_j}{\partial p_i}-[A_i, A_j]=0 \tag{3.139}$$

和

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_i}=0. \tag{3.140}$$

在 $n=2$ 时,这就是 SDYM 方程的一种写法[84]. 在文献[73]中它被推广到现在的形式,但空间的维数是 $4n(n\geqslant 1)$. 满足(3.139)式和(3.140)式的 $A_i$ 称为**广义的自对偶杨-Mills 势**.

**注 3.8** 我们已指出,自对偶的定义依赖于空间的度量,在 $\mathbf{R}^{2,2}$ 的情形,度量形式(3.137)式已改写为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}p_1\mathrm{d}x_1+\mathrm{d}p_2\mathrm{d}x_2,$$

而(3.139)式和(3.140)式是自对偶方程化简(通过“规范变换”)后的形式.

从(3.139)式可见,存在 $N\times N$ 阵 $J$,使

$$A_i=-\frac{\partial J}{\partial p_i}J^{-1}, \tag{3.141}$$

从而(3.140)式可写成为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial J}{\partial p_j}J^{-1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial J}{\partial p_i}J^{-1}\right)=0. \tag{3.142}$$

显然,(3.142)式和(3.140)式、(3.141)式等价.

现在再引入一个“时间”变数 $t$,使 $A_i$, $J$, $\Psi$ 和 $t$ 有关. 又令 $\Psi$ 满足

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = V\Psi = \sum_{a=0}^{m+q} V_a \lambda^{m-a} \Psi \quad (q \geqslant 0), \tag{3.143}$$

式中 $V_a$ 也是 $N \times N$ 矩阵值函数,不依赖谱参数 $\lambda$.

(3.143)式和(3.138)式组成了 $\mathbf{R}^{1+2n}$ 中的 Lax 组,其可积条件包含了关于 $V$ 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_0}{\partial x_i} = 0, \\ \dfrac{\partial V_a}{\partial x_i} = \dfrac{\partial V_{a-1}}{\partial p_i} + [A_i, V_{a-1}] \quad (a = 1, 2, \cdots, m), \end{cases} \tag{3.144}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_{m+q}}{\partial p_i} = [V_{m+q}, A_i], \\ \dfrac{\partial V_{a-1}}{\partial p_i} = \dfrac{\partial V_a}{\partial x_i} + [V_{a-1}, A_i] \quad (a = m+q, \cdots, m+2) \end{cases} \tag{3.145}$$

及 $A_i$ 的发展方程

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial V_m}{\partial p_i} - \frac{\partial V_{m+1}}{\partial x_i} + [A_i, V_m] = 0. \tag{3.146}$$

(3.139)式、(3.140)式和(3.146)式的解称为**广义自对偶杨-Mills 流**(广义 SDYM 流). 杨-Mills 势 $A_i$ 不但在每一时刻满足 SDYM,而且还满足一个发展型方程.

**定理 3.6**　如果 $A_i$ 满足广义 SDYM 方程(3.139)式和(3.140)式,则关于 $V_i$ 的方程组(3.144)式和(3.145)式都是完全可积的,所有的 $V_i$ 都可以用 $A_i$ 的微分和积分表达式写出来.

**证明**　由(3.144)式的第一式可见

$$V_0 = V_0(p, t). \tag{3.147}$$

从(3.144)式的其余式子可见

$$\frac{\partial^2 V_a}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V_{a-1}}{\partial p_i \partial x_j} + \left[\frac{\partial A_i}{\partial x_j}, V_{a-1}\right] + \left[A_i, \frac{\partial V_{a-1}}{\partial x_j}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 V_{a-2}}{\partial p_i \partial p_j} + \left[\frac{\partial A_j}{\partial p_i}, V_{a-2}\right] + \left[A_j, \frac{\partial V_{a-2}}{\partial p_i}\right]$$

$$+ \left[\frac{\partial A_i}{\partial x_j}, V_{a-1}\right] + \left[A_i, \frac{\partial V_{a-2}}{\partial p_j}\right]$$

$$+ [A_i, [A_j, V_{a-2}]]. \tag{3.148}$$

利用(3.139)式、(3.140)式以及 Jacobi 恒等式就可以知道(3.148)式右端关于 $i$, $j$ 是对称的,因而(3.144)式是完全可积的. 以 $p_i$ 为参数,$V_n$ 有如下的递推关系式:

$$\begin{aligned} V_0 &= V_0^0(p, t), \\ V_a &= \int \sum \left(\frac{\partial V_{a-1}}{\partial p_i} + [A_i, V_{a-1}]\right) \mathrm{d}x_i + V_a^0(p, t), \end{aligned} \tag{3.149}$$

这里的 $V_a^0(p, t)$ 是积分的初值,积分是沿 $p_i = \mathrm{const}$ 平面上的路径进行的,它和路径无关. 但也可取 $V_a^0$, 使之和 $t$ 也有关.

引入

$$W_a = J^{-1} V_a J \quad (a = m+q, \cdots, m+1), \tag{3.150}$$

利用(3.145)式可见

$$\frac{\partial W_{a-1}}{\partial p_i} = \frac{\partial W_a}{\partial x_i} + \left[J^{-1} \frac{\partial J}{\partial x_i}, W_a\right] \quad (a = m+q, \cdots, m+2). \tag{3.151}$$

由

$$\frac{\partial W_{m+q}}{\partial p_i} = 0$$

得

$$W_{m+q} = W_{m+q}^0(x, t).$$

又根据递推关系(3.151)式,有

$$W_{a-1} = \sum_i \int_{(x,0,t)}^{(x,p,t)} \left(\frac{\partial W_a}{\partial x_i} + \left[J^{-1} \frac{\partial J}{\partial x_i}, W_a\right]\right) \mathrm{d}p_i$$

$$+ W_{a-1}^0(x, t) \quad (a = m+q, \cdots, m+2). \tag{3.152}$$

这里的积分是在关于 $x_i = \mathrm{const}$ 平面上的路径所作的,$x_i$ 视为参数,这个积分与路径的选取无关,因而也得出 $V_a$ 的表达式.

因此,当 $A_i$ 满足(3.139)式和(3.140)式时,可逐步写出 $V_a(a=0,\cdots,m;\ a=m+q,m+q-1,\cdots,m+1)$ 使得(3.144)式和(3.145)式满足.定理证毕. ■

(3.139)式和(3.140)式可视为 $A_i$ 的“空间约束”,(3.146)式是它们的发展方程.空间约束的意义就是:在每一时刻 $A_i$ 满足广义的自对偶杨-Mills 方程.

### 3.6.2 Darboux 变换

设 $D$ 是 $N\times N$ 阵

$$D=\lambda I-S, \tag{3.153}$$

式中 $S$ 和 $\lambda$ 无关.令

$$\Psi'=D\Psi, \tag{3.154}$$

我们希望

$$\begin{aligned} &L_i\Psi'=\left(\frac{\partial}{\partial p_i}-\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Psi'=-A_i'\Psi',\\ &\frac{\partial\Psi'}{\partial t}=\sum_{a=0}^{m+q}V_a'\lambda^{m-a}\Psi' \end{aligned} \tag{3.155}$$

成立.经过直接的计算(和§3.2类似)可以得出

$$A_i'=A_i-\frac{\partial S}{\partial x_i}, \tag{3.156}$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_i}=SA_i-A_i'S=[S,A_i]+\frac{\partial S}{\partial x_i}S, \tag{3.157}$$

和

$$\begin{aligned} &V_0'=V_0,\\ &V_a'=V_a+V_{a-1}'S-SV_{a-1}\quad(a=1,2,\cdots,m), \end{aligned} \tag{3.158}$$

$$\begin{aligned} &V_{m+q}'=SV_{m+q}S^{-1},\\ &V_{m+k}'=SV_{m+k}S^{-1}-(V_{m+k+1}-V_{m+k+1}')S^{-1},\\ &\qquad(k=q-1,\cdots,1), \end{aligned} \tag{3.159}$$

以及

$$\frac{\partial S}{\partial t}+SV_m-V_m'S-V_{m+1}+V_{m+1}'=0. \tag{3.160}$$

我们注意到,当 $q \neq 0$ 时,$S$ 应为非退化的. 又可以验证(3.157)式、(3.160)式是完全可积的,即当 $t = t_0$,$p = p_0$ 时,如已给定 $S(t_0, p_0, x)$,则必存在 $S(t, p, x)$ 满足它们. 有定理如下:

**定理 3.7** 如果矩阵 $S$ 非退化且满足方程(3.157)式和(3.160)式,则 $D = \lambda I - S$ 是(3.138)式和(3.143)式的 Darboux 阵.

现在给出 $S$ 的显式作法,它本质上和 AKNS 系统的情形相同. 取 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 为 $N$ 个数,至少有两个不相同. $h_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, N)$ 是(3.138)式和(3.143)式相应于 $\lambda = \lambda_\alpha$ 的列向量解,即

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial p_i} = \lambda_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i} - A_i h_\alpha, \quad \frac{\partial h_\alpha}{\partial t} = \sum_a V_a \lambda_\alpha^{m-a} h_\alpha \tag{3.161}$$

成立. 令

$$H = (h_1, h_2, \cdots, h_N), \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N). \tag{3.162}$$

又设 $H$ 非退化,作

$$S = H\Lambda H^{-1}. \tag{3.163}$$

**定理 3.8** 设 $S$ 如(3.163)式所定义,则 $D = \lambda I - S$ 是 Darboux 阵.

**证明** 从(3.161)式的第一式可见

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}\Lambda - A_i H. \tag{3.164}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial p_i} &= \frac{\partial H}{\partial x_i}\Lambda^2 H^{-1} - H\Lambda H^{-1}\frac{\partial H}{\partial x_i}\Lambda H^{-1} - A_i S + S A_i, \\ \frac{\partial S}{\partial x_i} &= \frac{\partial H}{\partial x_i}\Lambda H^{-1} - H\Lambda H^{-1}\frac{\partial H}{\partial x_i} H^{-1}, \end{aligned} \tag{3.165}$$

所以

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = [S, A_i] + \frac{\partial S}{\partial x_i} S. \tag{3.166}$$

这就是(3.157)式. 另一方面,易见

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{a=0}^{m+q} V_a H \Lambda^{m-a}, \tag{3.167}$$

因而

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{a=0}^{m+q} V_a H \Lambda^{m-a+1} H^{-1} - \sum_{a=0}^{m+q} H \Lambda H^{-1} V_a H \Lambda^{m-a} H^{-1}$$
$$= \sum_{a=0}^{m+q} V_a S^{m-a} S - S \sum_{a=0}^{m+q} V_a S^{m-a}. \tag{3.168}$$

由(3.158)式和(3.159)式可以见到(3.168)式的右端正好就是 $-SV_m + V'_m S + V_{m+1} - V'_{m+1}$，所以(3.160)式成立. 定理证毕. ∎

我们指出，如果 $\Psi(\lambda)$ 是 Lax 组的基本解，那么 Lax 组的列向量解可写作 $\Psi(\lambda) l$，这里 $l$ 是列向量，且 $l = l(\lambda x + p)$. 同 AKNS 系统相比，它可以不是常数，而是 $\lambda x + p$ 的函数，所以其作法有更大的自由度.

这样，就显式地作出了 Darboux 变换

$$(\Psi,\ A_i) \to (\Psi',\ A'_i). \tag{3.169}$$

在这样构作中只含代数和微分的运算，与以前所述的一样，这种变换可以用同一算法继续进行下去.

**注 3.9** 有时我们要求势函数 $A_i$ 属于 $gl(N)$ 的一个子代数，例如 $A_i \in u(N)$，这时就要求 $A_i^* + A_i = 0$. 在作 Darboux 变换时，也要求 $A'^*_i + A'_i = 0$. 依(3.156)式可知，在构作 $S$ 时，要求它满足

$$\frac{\partial S^*}{\partial x_i} + \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0. \tag{3.170}$$

这一点，可以在如下的两个限制下做到：

(1) 取
$$\lambda_\alpha = \mu \ \text{或}\ \bar{\mu} \quad (\mu\ \text{是非实的复数}); \tag{3.171}$$

(2) 取 $h_\alpha$，使
$$h_\alpha^* h_\beta = 0 \tag{3.172}$$

在 $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ 时成立.

运用和§3.2中的论述相类似的论证，可以得到

$$S^* + S = (\mu + \bar{\mu}) I.$$

从而上述要求(3.170)式得到满足.

**注 3.10** 如果不考虑 $A_i$ 和 $t$ 有关，上述 Darboux 变换就适用于广义的 SDYM 系统，当然也适用于 $\mathbf{R}^{2,2}$ 上的 SDYM 系统.

### 3.6.3 例

我们从平凡解 $A_i = 0$ 出发,先作出相应的 Lax 组的解.为此,应先定出 $V_0, V_1, \cdots, V_m, V_{m+1}, \cdots, V_{m+q}$. (3.144)式和(3.145)式此时化为

$$\begin{aligned} & V_0 = V_0(p), \\ & \frac{\partial V_a}{\partial x_i} = \frac{\partial V_{a-1}}{\partial p_i} \quad (a = 1, 2, \cdots, m; m+q, \cdots, m+2), \\ & V_{m+q} = V^0_{m+q}(x). \end{aligned} \tag{3.173}$$

从这些式子可以见到,$V_m$ 关于 $x$ 是 $m$ 次多项式,$V_{m+1}$ 关于 $p$ 是 $q-1$ 次多项式.此外,(3.146)式化为

$$\frac{\partial V_m}{\partial p_i} = \frac{\partial V_{m+1}}{\partial x_i}, \tag{3.174}$$

从而可见 $V_m$ 是 $p$ 的 $q$ 次多项式,$V_{m+1}$ 是 $x$ 的 $m+1$ 次多项式,因此 $V_0$ 是 $p$ 的 $m+q$ 次多项式,$V_{m+q}$ 是 $x$ 的 $m+q$ 次多项式.又由 $V$ 的表示式及(3.173)式可见

$$\lambda \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial p_i} = 0, \tag{3.175}$$

因而 $V$ 是 $\lambda p_i + x_i$ 的函数,所以 $V$ 有表达式

$$V = \frac{1}{\lambda^q} P(\lambda p + x), \tag{3.176}$$

这里 $P(\lambda p + x)$ 是 $\lambda p_i + x_i$ 的 $m+q$ 次多项式.这样,(3.138)式和(3.143)式就有一个基本解

$$\Psi = \exp\left(\frac{1}{\lambda^q} P(\lambda p + x) t\right). \tag{3.177}$$

依照前面所述的方法作 Darboux 变换

$$(0, \Psi) \to (A^{(1)}, \Psi^{(1)}) \to (A^{(2)}, \Psi^{(2)}) \to \cdots, \tag{3.178}$$

就可以得到一系列的显式解.借用已有的术语,就称它们为**各个重数的孤立子解**.

为叙述更具体起见,取 $N = 2$,

$$V=\begin{pmatrix}\mathrm{i}v(\lambda) & 0\\ 0 & -\mathrm{i}v(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{3.179}$$

这里

$$v(\lambda)=\frac{1}{\lambda^{q}}u(\lambda p+x), \tag{3.180}$$

$u$ 是 $m+q$ 次的实多项式,则

$$\Psi=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v(\lambda)t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}v(\lambda)t}\end{pmatrix}. \tag{3.181}$$

取 $\mu$ 为一复数 $\mu=\sigma+\mathrm{i}\,\tau(\tau\neq 0)$. 则可取

$$H=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v(\mu)t} & -\overline{g(\mu)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v(\bar{\mu})t}\\ g(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v(\mu)t} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}v(\bar{\mu})t}\end{pmatrix}, \tag{3.182}$$

式中 $g(\mu)=g(\mu p+x)$, 容易见到,对于任意函数 $g$, $H$ 中的两列是 Lax 组对应于 $\lambda=\mu$ 和 $\bar{\mu}$ 的列向量解,且条件(3.172)式也能满足. 进一步,有

$$\Delta=\det H=\mathrm{e}^{wt}+|g(\mu)|^{2}\mathrm{e}^{-wt}\neq 0, \tag{3.183}$$

这里 $w=\mathrm{i}(v(\mu)-v(\bar{\mu}))$ 是一实值函数.

记

$$\begin{aligned}g(\mu)&=\mathrm{e}^{\rho(\mu)+\mathrm{i}\theta(\mu)},\\ v(\mu)+v(\bar{\mu})&=\kappa(\mu),\end{aligned} \tag{3.184}$$

其中 $\rho(\mu)$, $\theta(\mu)$ 是实值函数,经过一定的计算后得到

$$\begin{aligned}S&=H\Lambda H^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}\sigma-\mathrm{i}\tau\tanh(\rho-wt) & \mathrm{i}\tau\,\mathrm{sech}(\rho-wt)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta+\kappa t)}\\ \mathrm{i}\tau\,\mathrm{sech}(\rho-wt)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\kappa t)} & \sigma+\mathrm{i}\tau\tanh(\rho-wt)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.185}$$

第一个孤立子解

$$A_i=-\frac{\partial S}{\partial x_i}. \tag{3.186}$$

由于 $v$ 和 $g$ 的选取都有很大的自由度,所以这一类孤立子解可以有多种多样的形式. 在 $S$ 中出现了 sech 函数,可以看到,如果适当选取 $v$ 和 $g$,在 $\rho-wt\to\infty$ 时,$S$ 的元素可以趋向于常数或 0, $A_i$ 的元素趋向于 0,因而

可以得到孤立子形式的解,但这时它不是行波形式的解. 继续作 Darboux 变换,可以得到多重孤立子解.

### 3.6.4 和 AKNS 系统的关系

设 $J_i$ 为 $n$ 个 $N\times N$ 常值对角阵,对 Lax 组(3.138)式和(3.143)式中出现的 $\boldsymbol{\Psi}$, $A_i$, $V_a$, 作出如下的矩阵:

$$\begin{aligned}\Phi(p,\ t) &= \mathrm{e}^{-\sum x_j J_j}\boldsymbol{\Psi},\\ P_i(p,\ t) &= -\mathrm{e}^{-\sum x_j J_j}A_i\mathrm{e}^{\sum x_j J_j},\\ U_a(p,\ t) &= \mathrm{e}^{-\sum x_j J_j}V_a\mathrm{e}^{\sum x_j J_j}.\end{aligned}\tag{3.187}$$

我们假定,等式左端的 $\Phi$, $P_i$ 和 $U_a$ 都与 $x_i$ 无关,这就是说,(3.187)式已经对 Lax 组(3.138)式和(3.143)式作了约束.

通过直接运算,可以看到(3.138)式和(3.143)式经过这样的约束后,化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} &= (\lambda J_i + P_i)\Phi,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \sum_{a=0}^{m+q}U_a\lambda^{m-a}\Phi.\end{aligned}\tag{3.188}$$

这就是 $\mathbf{R}^{1+n}$ 上的 AKNS 系统, $p$ 是自变数,因而得到如下定理:

**定理 3.9** AKNS 系统是广义自对偶杨-Mills 流的一种约束.

R. S. Ward 认为"孤立子方程都是 $\mathbf{R}^4$ 上自对偶杨-Mills 方程的一种约束". 这一说法固然有相当根据,但孤立子方程是层出不穷的,它只能说明自对偶方程有非常丰富的内涵,而不能给予证明. 本章发展了高维时空的孤立子方程(AKNS 系统),显然,它们不能成为 $\mathbf{R}^4$ 上的自对偶方程的约束. 但本节的讨论说明了高维的 AKNS 系统是广义自对偶杨-Mills 流的一种约束,这就进一步说明后者的确有非常丰富的内涵.

# 第 4 章　常曲率曲面、Bäcklund 线汇和 Darboux 变换

经典微分几何学中出现过许多很有意义的偏微分方程，著名的 sine-Gordon 方程就是首先在微分几何中出现的.

19 世纪出现了非欧几何学，接着又知道了欧氏空间的负常曲率曲面能够局部地实现非欧几何，因而对负常曲率曲面的研究很受重视，在研究中出现了 sine-Gordon 方程及其 Bäcklund 变换. 一个负常曲率曲面对应于 sine-Gordon 方程的一个非零解，而 Bäcklund 变换给出了从一个负常曲率曲面到另一负常曲率曲面的构作方法，以及从 sine-Gordon 方程的一个解到另一解的作法，这些都是很有意义的结果. 到了 20 世纪中叶，方程的解的变换在孤立子理论中起了重要作用，人们逐步认识到微分几何学在孤立子理论中的意义与作用.

由于 Bäcklund 变换是由完全可积的非线性偏微分方程组所定义的，所以除一些特殊情况外，经典的 Bäcklund 变换的显式表达式一般是难以写出的[20, 68]. 但是，如前面几章所见，Darboux 变换是得出显式解的有效方法. 在本章中，我们把 Darboux 变换和经典的 Bäcklund 变换结合起来，给出负常曲率曲面的 Bäcklund 线汇的显式作法，并将证明，知道了一个负常曲率曲面后，通过 Darboux 变换就可以得出无限系列的负常曲率曲面. 我们还讨论了 Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中的常曲率曲面和推广的 Bäcklund 线汇的情形，仔细分析线汇的类时、类空的各种情况，得出它们的存在定理和显式的构作方法. 特别是给出方程 $\Delta\alpha = \sin\alpha$ 和 $\Delta\alpha = \sinh\alpha$ 之间的 Bäcklund 变换的几何意义及有关的常曲率曲面和 Bäcklund 线汇的显式作法，以及 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中 Bäcklund 线汇的完全分类. 由于运用了 Darboux 变换，所有这些算法都代数化了. 本章中还要将 Darboux 变换用于常平均曲率曲面和射影空间中周期 4 的 Laplace 序列的显式构作. 本章的另一

要点是指出：在众多的几何问题中，Lax 对不仅是辅助工具，而且其本身有明确的几何意义，有时它就是需要研究的几何对象. 用这个思想，可把许多几何对象的构作化为纯代数的(或者将分析算法减少到最低程度)，这将为显式解的构作(特别是在计算机上运用符号运算)提供系统的、有限步的算法化的方法.

为了读者方便，在本章中以微分形式为工具，叙述欧氏空间和 Minkowski 空间曲面论的基本事项作为准备.

## §4.1 欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 曲面论的基本事项

我们用活动标架法叙述欧氏空间曲面论的基本事项. 在 3 维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中，我们用 $\boldsymbol{r}$ 来表示点的位置向量，其长度为 $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 如所熟知，$\mathbf{R}^3$ 中的曲面是嵌入(或浸入)于 $\mathbf{R}^3$ 中的 2 维微分流形，它可以为一些开子集(称为曲面片)所覆盖，每个曲面片都和平面上一个连通开集同胚，具有参数表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ *)，在这个参数表示下，$\boldsymbol{r}_a=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^a}$ $(a=1, 2)$ 构成切平面的一组基，$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|}$ 是曲面的单位法线向量，$\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$ 构成以 $\boldsymbol{r}$ 为原点的标架. 曲面局部理论利用参数表示讨论曲面片的性质，它是曲面整体理论的必不可少的基础. 在后文中讨论局部理论时，所说的曲面，实际上是指曲面片. 因为 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ 是由曲面的参数表示自然产生的，所以这种标架称为联系于参数$(u^1, u^2)$的**自然标架**，简称自然标架. 对 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_a$, $\boldsymbol{n}$ 进行微分，然后再把它们写成 $\boldsymbol{r}_a$, $\boldsymbol{n}$ 的线性组合，就得到曲面的基本方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \mathrm{d}u^a\boldsymbol{r}_a, \\
\mathrm{d}\boldsymbol{r}_a &= \omega_a^b\boldsymbol{r}_b+\omega_a^3\boldsymbol{n}, \qquad (4.1)\\
\mathrm{d}\boldsymbol{n} &= \omega_3^b\boldsymbol{r}_b \quad (a, b=1, 2),
\end{aligned}
$$

---

*) 在两个曲面片的一公共区域中，参数表示$(u^1, u^2)$与$(v^1, v^2)$之间存在着可微分的可逆的转换关系 $v^a=\phi^a(u^1, u^2)$ $(a=1, 2)$, $\partial(\phi^1, \phi^2)/\partial(u^1, u^2)\neq 0$.

式中 $\omega_a^b$, $\omega_a^3$, $\omega_3^b$ 都是 $u^1$ 和 $u^2$ 的一次微分形式. 在此和下文中,上下相同的指标表示和式,和号 $\sum$ 被略去了.

曲面的第一基本形式是

$$I = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = g_{ab}\mathrm{d}u^a \mathrm{d}u^b, \tag{4.2}$$

式中

$$g_{ab} = \boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{r}_b = g_{ba}. \tag{4.3}$$

由于

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{r}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n} = 0,$$

所以 $\omega_3^b$ 和 $\omega_a^3$ 之间有关系

$$\omega_a^3 = - g_{ab}\omega_3^b. \tag{4.4}$$

记

$$\omega_a^3 = b_{ab}\mathrm{d}u^b, \tag{4.5}$$

由 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r} = 0$ 可以得出 $\omega_a^3 \wedge \mathrm{d}u^a = 0$(式中 $\wedge$ 是微分形式外积的通用记号),所以 $b_{ab} = b_{ba}$, 二次型

$$II = - \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n} = - g_{ab}\omega_3^b \mathrm{d}u^a = b_{ab}\mathrm{d}u^a \mathrm{d}u^b \tag{4.6}$$

为曲面的第二基本形式,其系数为

$$b_{ab} = - \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^b} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^a \partial u^b} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{4.7}$$

曲面的两个主曲率就是第二基本形式关于第一基本形式的特征值,即

$$\det(b_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) = 0$$

的两个根. 由于第一基本形式正定,两个主曲率均为实数.

$\omega_a^b$ 可写成

$$\omega_a^b = \Gamma_{ac}^b \mathrm{d}u^c, \tag{4.8}$$

$\Gamma_{ac}^b$ 是曲面的 Christoffel 记号,又称为 Christoffel 联络系数. 由 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r} = 0$ 还可得出 $\mathrm{d}u^a \wedge \omega_a^b = 0$, 因而有 $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c$. 又由

$$\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{r}_b = g_{ab}, \quad \boldsymbol{r}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_b + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{r}_b = \mathrm{d}g_{ab},$$

可得到

$$\mathrm{d}g_{ab} = g_{ac}\omega_b^c + g_{cb}\omega_a^c.$$

由上式及 $\Gamma^c_{ab}=\Gamma^c_{ba}$，得到

$$\Gamma^c_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{ad}}{\partial u^b}+\frac{\partial g_{bd}}{\partial u^a}-\frac{\partial g_{ab}}{\partial u^d}\right). \tag{4.9}$$

把基本方程(4.1)式进行外微分，得到(4.1)式的可积条件，具体地说，利用 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}=0$，从(4.1)式的第二式及第三式的外微分，得到

$$\mathrm{d}\omega_a^b+\omega_c^b\wedge\omega_a^c=\omega_a^3\wedge\omega_3^b, \tag{4.10}$$

$$\mathrm{d}\omega_a^3+\omega_b^3\wedge\omega_a^b=0. \tag{4.11}$$

(4.10)式与(4.11)式分别称为曲面的 Gauss 方程和 Codazzi 方程. (4.10)式的左方常记为

$$\mathrm{d}\omega_a^b+\omega_c^b\wedge\omega_a^c=\frac{1}{2}R^b_{acd}\mathrm{d}u^c\wedge\mathrm{d}u^d, \tag{4.12}$$

式中

$$R^b_{acd}=\frac{\partial\Gamma^b_{ad}}{\partial u^c}-\frac{\partial\Gamma^b_{ac}}{\partial u^d}+\Gamma^b_{ec}\Gamma^e_{ad}-\Gamma^b_{ed}\Gamma^e_{ac} \tag{4.13}$$

称为**黎曼曲率张量**，它是由第一基本形式系数 $g_{ab}$ 及其到二阶为止的导数所确定的几何量. 由方程(4.10)式、(4.4)式及(4.5)式得出

$$\frac{1}{2}R^b_{acd}\mathrm{d}u^c\wedge\mathrm{d}u^d=-b_{ac}\mathrm{d}u^c\wedge g^{be}b_{ed}\mathrm{d}u^d, \tag{4.14}$$

因而

$$R^b_{acd}=-g^{be}(b_{ac}b_{ed}-b_{ad}b_{ec}). \tag{4.15}$$

如记

$$R_{bacd}=g_{be}R^e_{acd}, \tag{4.16}$$

则有

$$R_{bacd}=b_{bc}b_{ad}-b_{ac}b_{bd},$$

式中 $a, b, c, d$ 取值 1, 2. 实质上这只有下述一个式子，即

$$R_{1212}=b_{11}b_{22}-b_{12}^2, \tag{4.17}$$

这是 Gauss 方程的另一种写法. 这个方程还可以写成为

$$\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=K. \tag{4.18}$$

$K$ 称为**曲面的总曲率**或 Gauss **曲率**. (4.18)式的左方由第一基本形式所确定,在 Gauss 以前,$K$ 是由第一基本形式和第二基本形式的系数共同确定的((4.18)式的第二等号). (4.18)式的第一等号是有名的 Gauss 定理,它说明曲面的 Gauss 曲率实际上可以由曲面的第一基本形式定出来. 由第一基本形式就能确定的曲面的性质称为**曲面的内蕴几何学**.

综上所述,对于给定的一个曲面 $S$,它的第一、第二基本形式必定满足 Gauss-Codazzi 方程. 反之,如果已给两个微分形式 $I = g_{ab}\mathrm{d}u^a\mathrm{d}u^b$ $(a, b = 1, 2, g_{ab}$ 为正定), $II = b_{ab}\mathrm{d}u^a\mathrm{d}u^b$, 并且 Gauss-Codazzi 方程成立,则必定存在一个曲面片,它以 $I$ 和 $II$ 为第一基本形式和第二基本形式. 这种曲面片在一个单连通区域中除一等长变换(运动及反射)外是唯一确定的. 这就是曲面的基本定理. 事实上,此曲面片 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 是从解线性方程组(4.1)式而确定的,但由于(4.1)式的可积条件就是 Gauss-Codazzi 方程,所以(4.1)式是完全可积的,因而上述基本定理成立.

$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ 可以用它们的线性组合来代替. 如果取 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 为 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ 的线性组合,且 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是相互正交的单位向量,那么 $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}\}$ 构成曲面在 $\boldsymbol{r}$ 点的正交标架. 这时,曲面的基本方程可写为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \omega^a \boldsymbol{e}_a, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_a &= \omega_a^b \boldsymbol{e}_b + \omega_a^3 \boldsymbol{n}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{n} &= \omega_3^a \boldsymbol{e}_a. \end{aligned} \tag{4.19}$$

这时,$\omega^a$ 和 $\omega_a^b$ 之间应有下述关系式:

$$\mathrm{d}\omega^a + \omega_b^a \wedge \omega^b = 0 \quad (a, b = 1, 2), \tag{4.20}$$

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{4.21}$$

$\omega_b^a (a, b = 1, 2)$ 由(4.20)式及 $\omega_b^a + \omega_a^b = 0$ 唯一确定. 在正交标架下, Gauss-Codazzi 方程化简为下列形式:

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 \tag{4.22}$$

$$\mathrm{d}\omega_a^3 + \omega_b^3 \wedge \omega_a^b = 0. \tag{4.23}$$

特别是,Gauss 方程还可写为

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = R_{1212}\omega^1 \wedge \omega^2 = K\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{4.24}$$

在后文中,我们的讨论以正交标架为基本表达工具. 在我们的叙述中,不规定标架$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}\}$的取向,即$\boldsymbol{n}$可以用$-\boldsymbol{n}$代替.

## §4.2 负常曲率曲面、sine-Gordon 方程和 Bäcklund 变换

### 4.2.1 sine-Gordon 方程与 $\mathbf{R}^3$ 中负常曲率曲面的关系[20, 68]

设$S$为欧氏空间$\mathbf{R}^3$中的负常曲率曲面,即$K$为负常数的曲面,通过曲面$S$的相似变换,不妨取$K=-1$. 取曲率线为坐标曲线并作相应的正交标架,即取曲率线的单位切向量为$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$,这时记

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\mathrm{d}v=A\mathrm{d}u\boldsymbol{e}_1+B\mathrm{d}v\boldsymbol{e}_2, \tag{4.25}$$

$$\omega^1=A\mathrm{d}u, \quad \omega^2=B\mathrm{d}v. \tag{4.26}$$

曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{d}s^2=A^2\mathrm{d}u^2+B^2\mathrm{d}v^2, \tag{4.27}$$

第二基本形式为

$$II=k_1A^2\mathrm{d}u^2+k_2B^2\mathrm{d}v^2=k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2, \tag{4.28}$$

式中$k_1, k_2$是主曲率,Gauss 曲率$K(=-1)$是它们的乘积. 另一方面,从(4.6)式可知第二基本形式

$$II=\omega_1^3\omega^1+\omega_2^3\omega^2. \tag{4.29}$$

与(4.28)式比较,得到

$$\omega_1^3=k_1\omega^1=k_1A\mathrm{d}u, \quad \omega_2^3=k_2\omega^2=k_2B\mathrm{d}v. \tag{4.30}$$

再由(4.20)式

$$\mathrm{d}\omega^a+\omega_b^a\wedge\omega^b=0$$

定出

$$\omega_1^2=-\omega_2^1=-\frac{A_v}{B}\mathrm{d}u+\frac{B_u}{A}\mathrm{d}v. \tag{4.31}$$

从 Codazzi 方程

$$d\omega_1^3 + \omega_2^3 \wedge \omega_1^2 = 0$$

得到

$$(k_1 A)_v = k_2 A_v,$$

即

$$(k_1 - k_2)A_v + k_{1v}A = 0. \tag{4.32}$$

因为 $K = k_1 k_2 = -1$，置 $k_1 = \tan\frac{\alpha}{2}$，$k_2 = -\cot\frac{\alpha}{2}(0 < \alpha < \pi)$，就有

$$k_1 - k_2 = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

代入(4.32)式得到

$$(\log A)_v - \left(\log\cos\frac{\alpha}{2}\right)_v = 0,$$

所以

$$A = \cos\frac{\alpha}{2}U(u),$$

同理可得

$$B = \sin\frac{\alpha}{2}V(v),$$

这里 $U(u)$，$V(v)$分别是 $u$，$v$ 的函数. 令 $du_1 = U(u)du$，$dv_1 = V(v)dv$，从而得到新的参数 $u_1$，$v_1$，仍记它们为 $u$，$v$，这样就有

$$A = \cos\frac{\alpha}{2},\ B = \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\begin{aligned} &\omega^1 = \cos\frac{\alpha}{2}du,\ \omega^2 = \sin\frac{\alpha}{2}dv, \\ &\omega_1^3 = \sin\frac{\alpha}{2}du,\ \omega_2^3 = -\cos\frac{\alpha}{2}dv, \\ &\omega_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha_v du + \alpha_u dv) = -\omega_2^1. \end{aligned} \tag{4.33}$$

代入 Gauss 方程(4.10)式，得

$$d\omega_2^1 = \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = k_1 k_2 \omega^1 \wedge \omega^2 = -\omega^1 \wedge \omega^2,$$

于是得到

$$\alpha_{uu} - \alpha_{vv} = \sin\alpha. \tag{4.34}$$

这就是 sine-Gordon 方程，这时所引进的坐标称为 Chebyshev 坐标，相应的标架称为 Chebyshev 标架[20]，容易验证，这时 Codazzi 方程是成立的，因而由曲面基本定理得知：

**定理 4.1** 对于 sine-Gordon 方程(4.34)式的任一解 $\alpha\ (0<\alpha<\pi)$，依据(4.33)式可通过求解曲面的基本方程，作出一个负常曲率曲面.

注意，在 Chebyshev 坐标下，曲面的第一基本形式为

$$ds^2 = \cos^2\frac{\alpha}{2}du^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}dv^2, \tag{4.35}$$

第二基本形式为

$$II = \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(du^2 - dv^2). \tag{4.36}$$

由此可见，两系渐近曲线是实的，且 $du : dv = 1 : \pm 1$ 是曲面渐近曲线方向，这两个方向的夹角的余弦是

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha. \tag{4.37}$$

所以 $\alpha$ 的几何意义为曲面的两根渐近曲线的夹角.

以下先作几点说明：

**注 4.1** 用上述方法所作出的曲面实际上是一个曲面片，也就是说，定理 4.1 是一个局部性的结果. 另一方面，经典的 Hilbert 定理说明，在 $\mathbf{R}^3$ 中不存在完备的负常曲率曲面[44]. 这里说一个曲面完备的意思是：作为一个 2 维的开流形，曲面上的任一测地线都可无限延长(包括有周期性和自身相交).

**注 4.2** 对正常曲率曲面(非球面)，也可有相应的 Chebyshev 坐标，此时

$$\omega^1 = \cosh\frac{\alpha}{2}du,\ \omega^2 = \sinh\frac{\alpha}{2}dv,$$

$$\omega_1^3 = \sinh\frac{\alpha}{2}du,\ \omega_2^3 = \cosh\frac{\alpha}{2}dv, \tag{4.38}$$

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = \frac{1}{2}(-\alpha_v du + \alpha_u dv).$$

曲面的构作依赖于求解负 sinh-Laplace 方程

$$\Delta\alpha = -\sinh\alpha, \tag{4.39}$$

其证明与负常曲率的情况相类似.

**注 4.3**　在 sine-Gordon 方程或负 sinh-Laplace 方程的解已知的情况下,求作负常曲率或正常曲率曲面,需要求解曲面的基本方程,这是一个线性的完全可积的偏微分方程组,解的存在性和作法归结为求解常微分方程组,但这时要想作出显式表达的解仍然是相当不容易的事,所以尽可能多地作出显式解仍然是一个很有意义的问题. 下面 Darboux 变换正好为此提供一个有效的方法.

### 4.2.2　伪球线汇

线汇起始于对光线的折射和反射的研究,在空间中依赖于两个参数的直线族构成一个线汇,例如曲面的法线全体构成一线汇,称为**法线汇**. 一般来说,给定一个线汇,它的直线全体并不一定能垂直于某一曲面,即不一定是法线汇.

一般的线汇(局部理论)可以用下述方法表述:设 $S$ 是一张曲面,其表示式为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(u,\ v).$$

在曲面上每一点,给定一个单位向量 $\boldsymbol{\xi}(u,\ v)$,作

$$\boldsymbol{Y}(u,\ v,\ \lambda) = \boldsymbol{X}(u,\ v) + \lambda\boldsymbol{\xi}(u,\ v), \tag{4.40}$$

当 $(u,\ v)$ 给定,$\lambda$ 变化时,$\boldsymbol{Y}$ 描绘一条直线,因而 $\boldsymbol{Y}$ 可表示依赖于两个参数 $(u,\ v)$ 的一个直线的集合,即线汇,曲面 $S$ 称为**参考曲面**. 显然,一个线汇的参考曲面的选取是相当任意的. 线汇中通过参考曲面 $S$ 上的一条曲线 $C$ 的直线全体构成一直纹面. 设 $C$ 的方程为 $u = u(t),\ v = v(t)$,代入 (4.40) 式就得到此直纹面的方程,其中 $t,\ \lambda$ 是此直纹面的参数. 在一定条件下,此直纹面会是可展曲面,即如果存在 $\lambda = \lambda(t)$ 使得 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 同方向,则此直纹面是可展曲面,曲线 $\boldsymbol{Y}(u,\ v,\ \lambda) = \boldsymbol{Y}(u(t),\ v(t),\ \lambda(t))$ 就是这可展曲面的刃线(锥面和柱面也是可展曲面,这时刃线退化为一点或在"无限远处"). 这时

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{X}(u(t),\ v(t)) + \lambda(t)\boldsymbol{\xi}(u(t),\ v(t)),$$

而

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\xi} + \lambda(t)\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \mu\boldsymbol{\xi},$$

亦即 $\boldsymbol{\xi}$, $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t}$线性相关. 因此,直纹面为可展曲面的充要条件是 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 满足

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t},\ \boldsymbol{\xi}\right)=0. \tag{4.41}$$

这个条件的微分形式是

$$\det(\boldsymbol{X}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{X}_v\mathrm{d}v,\ \boldsymbol{\xi}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{\xi}_v\mathrm{d}v,\ \boldsymbol{\xi})=0.$$

可把它写作

$$A\mathrm{d}u^2+2B\mathrm{d}u\mathrm{d}v+C\mathrm{d}v^2=0. \tag{4.42}$$

这是关于 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 的二次方程,在 $B^2-AC>0$ 的条件下,(4.42)式关于 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 有两个不相等的实根,对应于两张可展曲面. 因而对于线汇中的任一直线,有两个可展曲面通过它.

一般的可展曲面由空间曲线的切线所生成,所以在 $B^2-AC>0$ 的情况,对线汇中每一直线,两张可展曲面各有一条刃线和它相切,切点称为焦点,焦点的轨迹形成焦曲面,焦曲面也是由刃线所构成,所以线汇可看成由这两张焦曲面的公切线的全体所构成.

我们只考虑 $B^2-AC>0$ 的情形,设 $S$, $S^*$ 为一线汇的两张焦曲面,$PP^*$ 是线汇的直线,它们是两焦曲面的公切线,$P$ 和 $P^*$ 分别是切点,使点 $P$ 和 $P^*$ 相对应,就得到曲面 $S$ 到 $S^*$ 的对应,按几何学的传统术语,这一对应称为曲面 $S$ 到 $S^*$ 的 Laplace 变换(不同于分析中函数的 Laplace 变换).

设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}^*$ 分别是曲面 $S$ 在点 $P$ 与曲面 $S^*$ 在点 $P^*$ 的单位法向量,记 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}^*$ 的交角为 $\tau$, $PP^*$ 是 $S$ 和 $S^*$ 的公切线,其距离为 $l$,即

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*=\cos\tau, \tag{4.43}$$

$$d_{PP^*}=l, \tag{4.44}$$

当 $\tau$, $l$ 均为常数时 ($l\neq 0$, $\sin\tau\neq 0$), 称此线汇为**伪球线汇**.

对于伪球线汇,有下述定理:

**定理 4.2**(Bäcklund 定理) 设 $S$, $S^*$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中一伪球线汇的两张焦曲面,记对应点之间的距离为常数 $l\,(l\neq 0)$, 对应法线之间的交角为常数 $\tau\,(\sin\tau\neq 0)$, 则这两张焦曲面 $S$ 和 $S^*$ 有相同的负常数 Gauss 曲率 $K$,

且 $K=-\sin^2\tau/l^2$.

由此定理可知 $S$, $S^*$ 都是负常曲率曲面(又称**伪球曲面**),这就是**伪球线汇**名称的由来. 伪球线汇又称 Bäcklund 线汇.

**证明**　记 $S$ 上的一般点为 $P$,其位置向量为 $\boldsymbol{r}(u, v)$,$P$ 的对应点为 $P^*$,其位置向量为 $\boldsymbol{r}^*(u, v)$,$\boldsymbol{PP}^*$ 是 $S$ 和 $S^*$ 的公共切线,其单位向量为 $\boldsymbol{e}_1$,取 $S$ 的正交标架$\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}\}$,$S^*$ 的正交标架$\{P^*, \boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{n}^*\}$,这里 $\boldsymbol{e}_1^*=\boldsymbol{e}_1$. 按假定

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l\boldsymbol{e}_1, \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2^* &= \cos\tau\boldsymbol{e}_2+\sin\tau\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}^* &= -\sin\tau\boldsymbol{e}_2+\cos\tau\boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

$S$ 和 $S^*$ 的基本方程分别为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \omega^a\boldsymbol{e}_a, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_a &= \omega_a^b\boldsymbol{e}_b+\omega_a^3\boldsymbol{n}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{n} &= \omega_3^a\boldsymbol{e}_a, \end{aligned} \tag{4.47}$$

和

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}^* &= \omega^{*a}\boldsymbol{e}_a^*, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_a^* &= \omega_a^{*b}\boldsymbol{e}_b^*+\omega_a^{*3}\boldsymbol{n}^*, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{n}^* &= \omega_3^{*a}\boldsymbol{e}_a^*. \end{aligned} \tag{4.48}$$

从(4.45)式～(4.48)式得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}^* &= \omega^a\boldsymbol{e}_a+l\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 \\ &= (\omega^a+l\omega_1^a)\boldsymbol{e}_a+l\omega_1^3\boldsymbol{n}, \\ &= \omega^{*a}\boldsymbol{e}_a^*=\omega^{*1}\boldsymbol{e}_1+\omega^{*2}(\cos\tau\boldsymbol{e}_2+\sin\tau\boldsymbol{n}), \end{aligned}$$

因而

$$\omega^{*1}=\omega^1,\ \omega^{*2}=\frac{l}{\sin\tau}\omega_1^3 \tag{4.49}$$

成立. 改写(4.45)式和(4.46)式,使 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 由 $\boldsymbol{r}^*$, $\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$ 表示出来,就有

$$\omega^2 = \frac{l}{\sin\tau}\omega_1^{*3}. \tag{4.50}$$

由(4.46)式和(4.48)式得

$$\begin{aligned} de_2^* &= \cos\tau(\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 n) + \sin\tau(\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) \\ &= \omega_2^{*1} e_1^* + \omega_2^{*3} n^* \\ &= \omega_2^{*1} e_1^* + \omega_2^{*3}(-\sin\tau e_2 + \cos\tau n), \end{aligned}$$

因而

$$\omega_2^{*3} = \omega_2^3.$$

$S^*$ 的 Gauss 曲率 $K^*$ 由

$$d\omega_1^{*2} = \omega_1^{*3} \wedge \omega_3^{*2} = -K^* \omega^{*1} \wedge \omega^{*2} \tag{4.51}$$

所决定. 记 $\omega_2^{*3} = \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2$,则

$$\omega_1^{*3} \wedge \omega_3^{*2} = \frac{\sin\tau}{l}\omega^2 \wedge (-b\omega^1) = b\frac{\sin\tau}{l}\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{4.52}$$

另一方面,由 $\omega_\alpha^3 \wedge \omega^\alpha = 0$ 可知 $\omega_1^3$ 具有形式

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2,$$

所以

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{1}{b}\omega^1 \wedge \omega_1^3 = \frac{1}{b}\frac{\sin\tau}{l}\omega^{*1} \wedge \omega^{*2}. \tag{4.53}$$

将(4.52)式、(4.53)式代入(4.51)式就得出 $K^* = -\frac{\sin^2\tau}{l^2}$, 同理得 $K = -\frac{\sin^2\tau}{l^2}$. 定理证毕. ∎

### 4.2.3 Bäcklund 变换[20]

由定理 4.1 可知道,从 sine-Gordon 方程的任一解 $\alpha$ ($\alpha \neq 0$), 可作出一个相应的负常曲率曲面;又从 Bäcklund 定理得知,伪球线汇的两张焦曲面是具有相同的负常曲率的曲面. 这两张焦曲面对应于 sine-Gordon 方程的两个解. 但 Bäcklund 定理的上述证明并不能说明 Bäcklund 线汇的存在,也不能具体地给出从一个已知的负常曲率曲面出发构作一个新

的负常曲率曲面的方法，所以还需要作进一步的论述.

我们假设负常曲率曲面 $S$ 为已知(不妨设 $K=-1$)，现在要构作以 $S$ 为焦曲面的 Bäcklund 线汇和另一焦曲面 $S^*$.

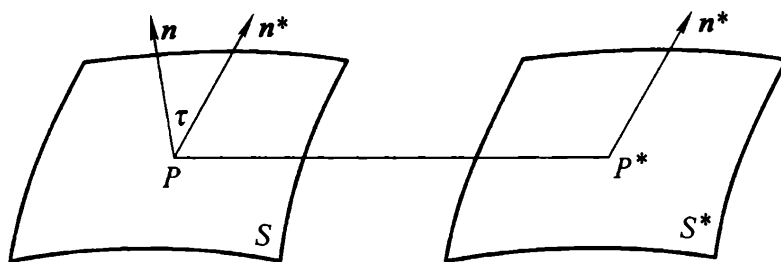



图 4.1

设 $S$ 的 Chebyshev 标架为$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{n})$，而

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r} + l(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2) \tag{4.54}$$

是曲面 $S$ 到 $S^*$ 的变换，$P$，$P^*$ 分别相应于 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}^*$，是 $S$ 和 $S^*$ 上的对应点，我们要求连线 $PP^*$ 构成伪球线汇，$\boldsymbol{e}$ 或 $\theta$ 是待求的. 设 $S$ 相应于 sine-Gordon方程的解 $\alpha$，对(4.54)式微分，利用 Chebyshev 标架下的公式(4.33)式，则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* &= \mathrm{d}\boldsymbol{r} + l(\cos\theta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2) + l(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2)\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u - l\sin\theta\mathrm{d}\theta - l\sin\theta\left(\frac{\alpha_v}{2}\mathrm{d}u + \frac{\alpha_u}{2}\mathrm{d}v\right)\right]\boldsymbol{e}_1 \\
&\quad + \left[\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v + l\cos\theta\mathrm{d}\theta + l\cos\theta\left(\frac{\alpha_v}{2}\mathrm{d}u + \frac{\alpha_u}{2}\mathrm{d}v\right)\right]\boldsymbol{e}_2 \\
&\quad + \left[l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\mathrm{d}u - l\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\mathrm{d}v\right]\boldsymbol{n}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

因为 $S^*$ 在 $P^*$ 点的单位法向量 $\boldsymbol{n}^*$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的交角是常数 $\tau$，$PP^*$ 和 $S^*$ 切于 $P^*$，所以

$$\boldsymbol{n}^* = \sin\tau\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\tau\cos\theta\boldsymbol{e}_2 + \cos\tau\boldsymbol{n}. \tag{4.56}$$

由于 $\boldsymbol{n}^*$ 是 $S^*$ 的法向量，它还必须满足 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*\cdot\boldsymbol{n}^* = 0$，这就得出

$$
\begin{aligned}
&l\sin\tau\mathrm{d}\theta-\sin\tau\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\mathrm{d}u-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\mathrm{d}v\right)\\
&\quad+l\sin\tau\left(\frac{\alpha_v}{2}\mathrm{d}u+\frac{\alpha_u}{2}\mathrm{d}v\right)-l\cos\tau\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\mathrm{d}u\right.\\
&\quad\left.-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\mathrm{d}v\right)=0.
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

如果这样的 $\theta$ 能构作出来，则 $PP^*$ 就构成一个伪球线汇，由 Bäcklund 定理知 $K=K^*=-\frac{\sin^2\tau}{l^2}$. 不妨令 $l=\sin\tau$, 又记 $\theta=\alpha_1/2$, 则 $\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\mathrm{d}v\right)$. 又因为(4.57)式对任意 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 成立，我们可以把它改变为偏微分方程组的形式，这样就得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sin\tau\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)=\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\tau\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha}{2},\\
&\frac{1}{2}\sin\tau\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}+\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)=-\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\tau\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

这个方程组就是 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换的原始形式. 如果把它看成 $\alpha_1$ 的偏微分方程组，其可积条件就是 sine-Gordon 方程

$$
\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=\sin\alpha,
$$

它是已经成立的，因而解 $\alpha_1$ 存在，并且在一点 $(u_0,v_0)$ 给出了 $\alpha_1$ 的值 $\alpha_{10}(0<\alpha_{10}<\pi)$, (4.58) 式关于 $\alpha_1$ 的解是唯一存在的. 又利用 $\alpha_{uv}=\alpha_{vu}$, 我们得知 $\alpha_1$ 也满足 sine-Gordon 方程. 从 $\alpha$ 到 $\alpha_1$ 的这种变换，称为 sine-Gordon 方程解之间的 Bäcklund 变换. 从而得到如下定理：

**定理 4.3** 设 $S$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个具有负常曲率 $K$ 的曲面，$K=-\sin^2\tau/l^2$, 其中 $l$, $\sin\tau$ 均为非零常数，又给定任意的单位向量 $\boldsymbol{e}_0\in T_{P_0}(M)$, 它不是一个主方向，则存在唯一的一张 Gauss 曲率为 $-\sin^2\tau/l^2$ 的曲面 $S^*$ 及以 $S$ 和 $S^*$ 为焦曲面，$l$, $\tau$ 为参数的伪球线汇，且以 $\boldsymbol{e}_0$ 为线汇中一条直线的方向向量.

这个定理也可使我们知道存在着大量的伪球线汇.

在微分几何中，曲面 $S^*$ 称为曲面 $S$ 的 Bäcklund 变换. 对于 $S^*$, 可以把(4.55)式写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = A^* \mathrm{d}u\boldsymbol{e}_1^* + B^* \mathrm{d}v\boldsymbol{e}_2^* \tag{4.59}$$

的形式. 我们还要证明,$S$ 的 Chebyshev 坐标$(u, v)$同时还是 $S^*$ 的 Chebyshev 坐标. 因为 $\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$ 为单位向量,利用(4.48)式和(4.55)式,就可得到

$$A^* = \cos\frac{\alpha_1}{2}, \quad B^* = \sin\frac{\alpha_1}{2},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1^* = &\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2} - \cos\tau\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2}\right)\boldsymbol{e}_1\\ &+\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2} + \cos\tau\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}\right)\boldsymbol{e}_2 + \sin\tau\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n},\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_2^* = &\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2} + \cos\tau\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2}\right)\boldsymbol{e}_1\\ &+\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2} - \cos\tau\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}\right)\boldsymbol{e}_2 - \sin\tau\cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}.\end{aligned}$$

从而

$$\omega_1^* = \cos\frac{\alpha_1}{2}\mathrm{d}u, \quad \omega_2^* = \sin\frac{\alpha_1}{2}\mathrm{d}v. \tag{4.61}$$

依(4.56)式计算 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}^*$,把它们分解为 $\boldsymbol{e}_1^*$ 与 $\boldsymbol{e}_2^*$ 的和,经过比较冗长但直接的运算,则得出

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\boldsymbol{n}^* = \omega_3^{*1}\boldsymbol{e}_1^* + \omega_3^{*2}\boldsymbol{e}_2^*,\\ &\omega_3^{*1} = \sin\frac{\alpha_1}{2}\mathrm{d}u, \quad \omega_3^{*2} = -\cos\frac{\alpha_1}{2}\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{4.62}$$

(4.62)式和(4.33)式虽然差一符号,但 $\boldsymbol{n}^*$ 可以用 $-\boldsymbol{n}^*$ 代替,所以仍有:

**定理 4.4** 设 $S^*$ 是负常曲率曲面 $S$ 的 Bäcklund 变换,若$(u, v)$是 $S$ 的 Chebyshev 坐标,则它也是 $S^*$ 的 Chebyshev 坐标.

### 4.2.4 Darboux 变换[34]

前一段的讨论已使我们明确,设 $\alpha$ 为 sine-Gordon 方程的解,$S$ 是它相应的负常曲率曲面,如果 $\alpha_1$ 是(4.58)式的解,(4.54)式就是 $S$ 的 Bäcklund 变换的显式表达式,式中 $\theta = \alpha_1/2$. 为了最终得到 $S^*$ 的显式表达式,还必须有 $\alpha_1$ 的显式表示. 为此,我们要运用 Darboux 变换. 首先

引入参数

$$\xi = \frac{u+v}{2}, \quad \eta = \frac{u-v}{2}, \tag{4.63}$$

方程(4.58)式化为形式

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha)_\xi &= 2\beta \sin\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}, \\ (\alpha_1 - \alpha)_\eta &= \frac{2}{\beta}\sin\frac{\alpha_1 + \alpha}{2}, \end{aligned} \tag{4.64}$$

式中

$$\beta = \frac{1-\cos\tau}{\sin\tau} \neq 0, \tag{4.65}$$

而 sine-Gordon 方程化为它的另一形式

$$\alpha_{\xi\eta} = \sin\alpha. \tag{4.66}$$

在第 1 章中已叙述了 sine-Gordon 方程的 Darboux 变换,为了读者方便,在此再叙述一下,若知 $\alpha$ 为其一解,相应的 Lax 对

$$\begin{aligned} \Phi_\eta &= \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{\alpha_\eta}{2} \\ \frac{\alpha_\eta}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \Phi, \\ \Phi_\xi &= \frac{1}{4\lambda}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \Phi \end{aligned} \tag{4.67}$$

为完全可积. 可以直接验证,若$\begin{pmatrix} \phi_1(\lambda) \\ \phi_2(\lambda) \end{pmatrix}$是 Lax 对(4.67)式的一个列向量解,则$\begin{pmatrix} \phi_2(\lambda) \\ -\phi_1(\lambda) \end{pmatrix}$是 Lax 对当谱参数为$-\lambda$时的列向量解,因此,$\begin{pmatrix} \phi_2(-\lambda) \\ -\phi_1(-\lambda) \end{pmatrix}$是 Lax 对(4.67)式的谱参数为$\lambda$的一个列向量解,从而$\Phi(\lambda)$可以取为

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda) & \phi_2(-\lambda) \\ \phi_2(\lambda) & -\phi_1(-\lambda) \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

的形式.

现取定$\lambda = \lambda_1 \neq 0$, 设$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$为 Lax 对(4.67)式相应于$\lambda = \lambda_1$的一个

列向量解. 可取

$$h_1 = \phi_1(\lambda_1) + b_1\phi_2(-\lambda_1), \quad h_2 = \phi_2(\lambda_1) - b_1\phi_1(-\lambda_1),$$

这里 $b_1$ 是常数. 由上面的论述可知, $\begin{pmatrix} -h_2 \\ h_1 \end{pmatrix}$ 是 Lax 对(4.67)式的相应 $\lambda = -\lambda_1$ 的列向量解. 令

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & -h_2 \\ h_2 & h_1 \end{pmatrix},$$

则 $\det H = h_1^2 + h_2^2$. 只要 $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ 是非平凡解, $h_1$, $h_2$ 不会同时为 0(由线性方程组的性质知, $h_1$, $h_2$ 如在一点为 0, 则 $h_1 = h_2 = 0$ 处处成立). 作矩阵

$$\begin{aligned} S &= H\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} H^{-1} \\ &= \frac{\lambda_1}{h_1^2 + h_2^2}\begin{pmatrix} h_1^2 - h_2^2 & 2h_1h_2 \\ 2h_1h_2 & h_2^2 - h_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda_1}{1+\sigma^2}\begin{pmatrix} 1-\sigma^2 & 2\sigma \\ 2\sigma & -1+\sigma^2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1\begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} & \sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\psi}{2} & -\cos\frac{\psi}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.69}$$

在此我们记

$$\sigma = \frac{h_2}{h_1}, \quad \psi = 4\tan^{-1}\sigma, \tag{4.70}$$

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}, \quad \sin\frac{\psi}{2} = \frac{2\sigma}{1+\sigma^2}. \tag{4.71}$$

阵

$$D(\lambda) = \lambda I - S \tag{4.72}$$

称为 Darboux 阵, 它具有如下的性质: 令

$$\Phi_1(\lambda) = D(\lambda)\Phi(\lambda), \tag{4.73}$$

则 $\Phi_1(\lambda)$可满足 Lax 对(4.67)式,但 $\alpha$ 须换为适当的 $\alpha_1$,这在第 1 章中已叙述过,但也可以由直接的计算证明.由

$$\begin{aligned}\Phi_{1\eta} &= -S_\eta\Phi + (\lambda I - S)\Phi_\eta \\ &= \left[-S_\eta + (\lambda I - S)\begin{pmatrix}\lambda & -\alpha_\eta/2 \\ \alpha_\eta/2 & -\lambda\end{pmatrix}\right]\Phi(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix}\lambda & -\alpha_{1\eta}/2 \\ \alpha_{1\eta}/2 & -\lambda\end{pmatrix}(\lambda I - S)\Phi\end{aligned}$$

及 $\det \Phi(\lambda) \neq 0$, 得

$$\begin{aligned}&-S_\eta + (\lambda I - S)\begin{pmatrix}\lambda & -\alpha_\eta/2 \\ \alpha_\eta/2 & -\lambda\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\lambda & -\alpha_{1\eta}/2 \\ \alpha_{1\eta}/2 & -\lambda\end{pmatrix}(\lambda I - S).\end{aligned}$$

比较两端 $\lambda$ 的各次的系数,可以见到 $\lambda^2$ 项是恒等的,$\lambda$ 的一次方项相等得出

$$\alpha_{1\eta} - \alpha_\eta = -4\lambda_1 \sin\frac{\psi}{2}, \tag{4.74}$$

由 $\lambda$ 零次方项相等得到

$$\alpha_{1\eta} = -\alpha_\eta + \psi_\eta. \tag{4.75}$$

用同样方法考虑 Lax 对中关于 $\xi$ 导数的部分,则得出

$$\alpha_1 = \psi - \alpha, \tag{4.76}$$

$$\psi_\xi = \frac{1}{\lambda_1}\sin\frac{\alpha - \alpha_1}{2}. \tag{4.77}$$

取 $\beta = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$, 从(4.74)式～(4.77)式就得到(4.64)式,这就是说,已经给出了偏微分方程组(4.64)式的显式解,给出 $\alpha_1$ 的显式表达式,$(\Phi, \alpha) \to (\Phi_1, \alpha_1)$称为 Darboux 变换.注意到 $\cos\dfrac{\alpha_1}{2}$, $\sin\dfrac{\alpha_1}{2}$可以由 $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2}$及$\dfrac{h_1}{h_2}$以代数式表达,所以 Bäcklund 变换可以由纯代数的算法来完成.

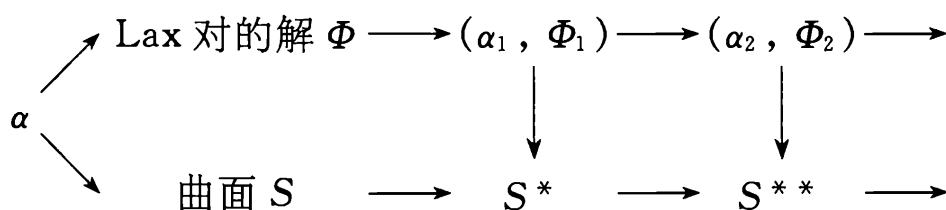
**定理 4.5** 取 $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2\beta}$, Darboux 变换$(\Phi, \alpha) \to (\Phi_1, \alpha_1)$所给出的解

$\alpha_1$ 正好是 Bäcklund 变换方程(4.64)式的解.

由此就得到负常曲率曲面 $S^*$ 的显式作法如下：

**定理 4.6**　设 $\alpha$ 为 sine-Gordon 方程的一个解 $(0 < \alpha < \pi)$, $\Phi$ 为其 Lax 对的基本解,$S$ 为相应的负常曲率曲面(由 Chebyshev 坐标表示),则可由 Darboux 变换得出 sine-Gordon 方程的一个新解 $\alpha_1$,而变换(4.54)式给出了 $\alpha_1$ 所相应的负常曲率曲面.

根据以上定理,我们可以把 sine-Gordon 方程的一个解 $\alpha$、其 Lax 基本解 $\Phi$ 以及相应的用 Chebyshev 坐标表示的负常曲率曲面 $S$ 作为出发点,运用 Darboux 变换和 Bäcklund 变换(4.54)式,用代数算法得到一系列的负常曲率曲面. 这个过程可以表示如下：




在以上过程中,$\alpha$ 到 $\Phi$ 和到 $S$ 的两个倾斜的“→”需要求解线性的完全可积偏微分方程组,而其余的“→”都是代数算法. 这里代数算法可以包括求指数函数、三角函数和反三角函数在内,但在作曲面的 Bäcklund 变换时,只需要$\cos\frac{\alpha_1}{2}$, $\sin\frac{\alpha_1}{2}$,它们都可以用 $\sigma$ 和 $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的代数式表示,因而算法是纯代数的.

## 4.2.5　例

我们从 $\alpha = 0$ 出发,通过 Darboux 变换作 sine-Gordon 方程的解. 这时

$$\Phi_\eta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}\Phi, \quad \Phi_\xi = \frac{1}{4\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Phi,$$

因而基本解

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{\lambda\eta+\frac{\xi}{4\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\eta-\frac{\xi}{4\lambda}} \end{pmatrix}.$$

取 $\lambda = \lambda_1$, 代入(4.70)式得

$$\sigma = b e^{-2\lambda_1\eta-\frac{\xi}{2\lambda_1}}.$$

为方便计,取 $b=1$, 得

$$\alpha_1 = 4\tan^{-1}\sigma = 4\tan^{-1}(e^{-2\lambda_1\eta-\frac{\xi}{2\lambda_1}}).$$

Darboux 阵取形式

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix}(\lambda+\lambda_1\tanh\gamma) & -\lambda_1\operatorname{sech}\gamma\\ -\lambda_1\operatorname{sech}\gamma & (\lambda-\lambda_1\tanh\gamma)\end{pmatrix},$$

式中

$$\gamma=-2\lambda_1\eta-\frac{\xi}{2\lambda_1},$$

这时

$$\Phi_1(\lambda)=D(\lambda)\Phi(\lambda)$$

$$=\begin{pmatrix}(\lambda+\lambda_1\tanh\gamma)e^{\lambda\eta+\frac{\xi}{4\lambda}} & -\lambda_1\operatorname{sech}\gamma e^{-\lambda\eta-\frac{\xi}{4\lambda}}\\ -\lambda_1\operatorname{sech}\gamma e^{\lambda\eta+\frac{\xi}{4\lambda}} & (\lambda-\lambda_1\tanh\gamma)e^{-\lambda\eta-\frac{\xi}{4\lambda}}\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=\lambda_2$ 时,取

$$\phi_1'(\lambda_2)=(\lambda_2+\lambda_1\tanh\gamma)e^{\lambda_2\eta+\frac{\xi}{4\lambda_2}},$$

$$\phi_2'(\lambda_2)=(-\lambda_1\operatorname{sech}\gamma)e^{\lambda_2\eta+\frac{\xi}{4\lambda_2}},$$

$$\sigma'=\frac{(-\lambda_1\operatorname{sech}\gamma)e^{\lambda_2\eta+\frac{\xi}{4\lambda_2}}+b(\lambda_2-\lambda_1\tanh\gamma)e^{-\lambda_2\eta-\frac{\xi}{4\lambda_2}}}{(\lambda_2+\lambda_1\tanh\gamma)e^{\lambda_2\eta+\frac{\xi}{4\lambda_2}}+b(-\lambda_1\operatorname{sech}\gamma)e^{-\lambda_2\eta-\frac{\xi}{4\lambda_2}}}$$

得到新解

$$\alpha_2=4\tan^{-1}\sigma'-\alpha_1.$$

另一方面,对 $\alpha=0$, 解曲面基本方程

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_1du,\quad d\boldsymbol{e}_1=0,\quad d\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{n}dv,\quad d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_2dv,$$

可得

$$\boldsymbol{r}=(u,0,0),\quad \boldsymbol{e}_1=(1,0,0),$$

$$\boldsymbol{e}_2=(0,\cos v,\sin v),\quad \boldsymbol{n}=(0,\sin v,-\cos v).$$

这时所得到的并不是一个曲面,而是一条直线以及沿直线的两个参数标架族,但由于基本方程满足,仍可以此为出发点来构作负常曲率曲面. 在当前情况下:

$$\theta = \frac{\alpha_1}{2} = 2\tan^{-1}\sigma,$$

$$\cos\theta = -\tanh\gamma, \quad \sin\theta = \operatorname{sech}\gamma.$$

依(4.54)式,曲面 $S^*$ 的方程为

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right),$$

或

$$x_1 = u - l\tanh\gamma,$$

$$x_2 = l\operatorname{sech}\gamma\cos v,$$

$$x_3 = l\operatorname{sech}\gamma\sin v,$$

$$l = \frac{-4\lambda_1}{1+4\lambda_1^2}.$$

这里 $\gamma$ 应看成为 $(u, v)$ 的函数.

为作第二曲面 $S^{**}$,应将 $\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$ 写出,由(4.60)式及 $\alpha = 0$,则有

$$\boldsymbol{e}_1^* = \cos\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{e}_2^* = \cos\tau\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1 - \cos\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right) - \sin\tau\boldsymbol{n}.$$

从而可见,第二张曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}^{**} = u\boldsymbol{e}_1 - \frac{4\lambda_1}{1+4\lambda_1^2}\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right) - \frac{4\lambda_2}{1+4\lambda_2^2}\left(\cos\frac{\alpha_2}{2}\boldsymbol{e}_1^* + \sin\frac{\alpha_2}{2}\boldsymbol{e}_2^*\right).$$

这些负常曲率曲面可以用计算机描绘出来.在文献[64]中,附有一些已知的负常曲率曲面(及其他有趣的曲面)的图像.

## §4.3　Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 的常曲率曲面和伪球线汇

### 4.3.1　Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中曲面的基本事项

Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 和欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 一样,是平直空间,其中向量 $\boldsymbol{l}$ 有

三个坐标 $l_1$, $l_2$, $l_3$,不同的是,两个向量 $\boldsymbol{l}(l_1, l_2, l_3)$和 $\boldsymbol{m}(m_1, m_2, m_3)$的数量积的定义是

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}=l_1m_1+l_2m_2-l_3m_3, \tag{4.78}$$

而向量 $\boldsymbol{l}$ 的长度平方

$$\boldsymbol{l}^2=l_1^2+l_2^2-l_3^2 \tag{4.79}$$

不是正定的. 根据 $\boldsymbol{l}^2$ 的符号,非零向量可分为三类:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{l}^2>0, \quad 类空;\\&\boldsymbol{l}^2<0, \quad 类时;\\&\boldsymbol{l}^2=0, \quad 类光.\end{aligned} \tag{4.80}$$

类光的向量组成一个光锥 $l_1^2+l_2^2-l_3^2=0$;类空的向量指向光锥的外部;类时的向量指向光锥的内部,类时和类光的向量还依 $l_3$ 的正负,分别称为指向未来和指向过去. 与类时向量正交的向量总是类空的,与类空向量正交的向量有类空的,有类时的,也有类光的. 类光的向量与自身正交,与它正交的向量还有类空的向量,它们所成的平面包括类光向量本身,是光锥的切平面.

$\mathbf{R}^{2,1}$中的点$(x, y, z)$可以用它的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 表示,$\boldsymbol{r}$ 依赖于原点的选取,$\boldsymbol{r}$ 只表示这个点和原点的相关位置,而原点又可任意改变,所以我们不需要关注 $\boldsymbol{r}$ 的类光、类时和类空. 在狭义相对论中,空间和时间统一在一个 4 维的 Minkowski 时空中,我们研究 $\mathbf{R}^{2,1}$ 的几何学,有利于了解相对论中的时空,而类时、类空和类光等术语,就是从相对论中产生的.

在 $\mathbf{R}^{2,1}$中的曲面,照样可以定义法线向量 $\boldsymbol{n}$:当 $\boldsymbol{n}$ 为类时向量时,曲面的切平面上的所有向量为类空,曲面称为**类空的**;当 $\boldsymbol{n}$ 为类空向量时,曲面称为**类时的**. 曲面的切平面上的向量有类空、类时、类光三种. 此外还可以有类光曲面,法线为类光的,它位于切平面上. 也还有混合型的曲面,它是连通的,但包括类空、类时及类光的部分. 本书中只讨论类空的和类时的曲面. 和 $\mathbf{R}^3$ 的情形一样,借助于单位正交的标架$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n})$,可以写出曲面的基本方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\omega^a\boldsymbol{e}_a,\\\mathrm{d}\boldsymbol{e}_a&=\omega_a^b\boldsymbol{e}_b+\omega_a^3\boldsymbol{n},\\\mathrm{d}\boldsymbol{n}&=\omega_3^a\boldsymbol{e}_a.\end{aligned} \tag{4.81}$$

相应的可积条件为:

$$d\omega^a + \omega_b^a \wedge \omega^b = 0, \quad \omega_a^3 \wedge \omega^a = 0,$$

$$d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = -\omega_3^a \wedge \omega_b^3 \quad (\text{Gauss 方程}), \tag{4.82}$$

$$d\omega_a^3 + \omega_b^3 \wedge \omega_a^b = 0 \quad (\text{Codazzi 方程}),$$

但必须区分曲面为类时或类空的情况.

(1) **类空曲面**

我们选择正交标架$\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}\}$,这时

$$\boldsymbol{e}_a \cdot \boldsymbol{e}_b = \delta_{ab}, \quad \boldsymbol{e}_a \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{n}^2 = -1, \tag{4.83}$$

则有

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2, \quad \omega_a^3 = \omega_3^a. \tag{4.84}$$

曲面的第一基本形式为

$$I = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = g_{ab}\omega^a\omega^b, \tag{4.85}$$

这里

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

此时仍然可令

$$\omega_a^3 = b_{ac}\omega^c \quad (b_{ac} = b_{ca}). \tag{4.86}$$

而曲面的第二基本形式为

$$II = -d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{n} = -\omega_a^3\omega^a = -b_{ac}\omega^a\omega^c. \tag{4.87}$$

Gauss 方程为

$$d\omega_b^a = \frac{1}{2}R_{bcd}^a\omega^c \wedge \omega^d = -\omega_3^a \wedge \omega_b^3$$

$$= -\frac{1}{2}(b_{ac}b_{bd} - b_{ad}b_{bc})\omega^c \wedge \omega^d,$$

同以前一样,这实质上只有一个等式:

$$R_{1212} = -(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) \quad (R_{1212} = R_{212}^1). \tag{4.88}$$

Gauss 曲率的内在定义为

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = R_{1212}. \tag{4.89}$$

所以 Gauss 方程可写为

$$K \doteq -(b_{11}b_{22}-b_{12}^2), \tag{4.90}$$

而

$$d\omega_2^1 = -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = R_{1212}\omega^1 \wedge \omega^2 = K\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{4.91}$$

(4.90)式与欧氏空间的相应公式差一符号. 曲面的两个主曲率仍为第二基本形式关于第一基本形式的特征值.

(2) **类时曲面**

在其上选取正交标架,取 $\boldsymbol{e}_1$ 为类空,$\boldsymbol{e}_2$ 为类时,有

$$\boldsymbol{e}_1^2 = 1, \quad \boldsymbol{e}_2^2 = -1, \quad \boldsymbol{n}^2 = 1 \tag{4.92}$$

成立. 这时就应有

$$\begin{aligned} &\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^1 = \omega_1^2, \\ &\omega_3^1 = -\omega_1^3, \quad \omega_3^2 = \omega_2^3. \end{aligned} \tag{4.93}$$

第一基本形式

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = (\omega^1)^1 - (\omega^2)^2 = g_{ab}\omega^a\omega^b \tag{4.94}$$

是非正定的. 这时, $g_{11}=1$, $g_{22}=-1$, $g_{12}=0$. 此时仍可记

$$\omega_a^3 = b_{ac}\omega^c \quad (b_{ac}=b_{ca}), \tag{4.95}$$

而第二基本形式

$$\begin{aligned} II &= -d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n} = -\omega^1\omega_3^1 + \omega^2\omega_3^2 \\ &= \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = b_{ac}\omega^a\omega^c. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Gauss 曲率的内在定义为

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} = -R_{1212}, \tag{4.97}$$

Gauss 方程为

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 &= R_{212}^1\omega^1 \wedge \omega^2 = R_{1212}\omega^1 \wedge \omega^2 = -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3 \\ &= (b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\omega^1 \wedge \omega^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned} \tag{4.98}$$

这式子右端与(4.91)式差一符号. 还应注意到,如标架满足 $\boldsymbol{e}_1^2=-1$, $\boldsymbol{e}_2^2=1$, 那么(4.98)式要改为

$$d\omega_2^1 = R_{212}^1\omega^1 \wedge \omega^2 = -R_{1212}\omega^1 \wedge \omega^2 = -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3$$
$$= -(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\omega^1 \wedge \omega^2 = K\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{4.98$'$}$$

将欧氏空间曲面论和 Minkowski 空间类空曲面论和类时曲面论相比较，某些公式(特别是有关 $K$ 的表达式)有时会出现符号上的差别[45].

### 4.3.2　常曲率曲面的 Chebyshev 坐标

$\mathbf{R}^{2,1}$中的常曲率曲面有类空、类时之分，曲率有正负之别(不妨取为±1). 不仅如此，对类时正曲率曲面，第二基本形式关于第一基本形式的特征值(主曲率)有可能为虚、又有可能为实的重根，但特征向量只张成一维子空间[99, 100]. 所以需要区分各种情况加以讨论. 对每一种常曲率曲面，我们都选取适当的标架和坐标，把曲面的构作联系于一个可积的方程的求解. 下面分别就各种情况写出在 Chebyshev 坐标下曲面的基本方程和 Gauss 方程，不再作详细的论证.

**(1) 类空的正常曲率曲面 ($K = +1$)**

$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}$ 满足(4.83)式，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 和曲率线相切. 可取

$$\omega^1 = \cos\frac{\alpha}{2}du, \quad \omega^2 = \sin\frac{\alpha}{2}dv. \tag{4.99}$$

和欧氏空间负常曲率的情况一样，

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = \frac{1}{2}(\alpha_v du + \alpha_u dv). \tag{4.100}$$

同时取

$$\omega_1^3 = \sin\frac{\alpha}{2}du, \quad \omega_2^3 = -\cos\frac{\alpha}{2}dv. \tag{4.101}$$

容易验证，Codazzi 方程

$$d\omega_1^3 + \omega_2^3 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad d\omega_2^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_2^1 = 0 \tag{4.102}$$

满足，而且

$$b_{11} = \tan\frac{\alpha}{2}, \quad b_{22} = -\cot\frac{\alpha}{2}, \quad b_{12} = 0, \tag{4.103}$$

因而

$$K = -b_{11}b_{22} = 1. \tag{4.104}$$

同时,第一基本形式为

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = \cos^2\frac{\alpha}{2}du^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}dv^2, \tag{4.105}$$

第二基本形式为

$$II = -\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(du^2 - dv^2), \tag{4.106}$$

而 Gauss 方程化为负 sine-Gordon 方程

$$\alpha_{uu} - \alpha_{vv} = -\sin\alpha, \tag{4.107}$$

互换参数 $u$, $v$,它就和 sine-Gordon 方程相一致.

(2) **类空的负常曲率曲面** ($K = -1$)

在无脐点的假设下,$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}$ 满足(4.83)式,$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 和曲率线相切.可取

$$\omega^1 = \cosh\frac{\alpha}{2}du, \quad \omega^2 = \sinh\frac{\alpha}{2}dv, \tag{4.108}$$

从而可得

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha_v du - \alpha_u dv). \tag{4.109}$$

同时

$$\omega_1^3 = \sinh\frac{\alpha}{2}du, \quad \omega_2^3 = \cosh\frac{\alpha}{2}dv, \tag{4.110}$$

容易验证满足 Codazzi 方程,而且

$$b_{11} = \tanh\frac{\alpha}{2}, \quad b_{22} = \coth\frac{\alpha}{2}, \quad b_{12} = 0, \tag{4.111}$$

因而

$$K = -b_{11}b_{22} = -1. \tag{4.112}$$

同时,第一基本形式是

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = \cosh^2\frac{\alpha}{2}du^2 + \sinh^2\frac{\alpha}{2}dv^2, \tag{4.113}$$

第二基本形式是

$$II = -\cosh\frac{\alpha}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}(du^2 + dv^2), \tag{4.114}$$

而 Gauss 方程化为

$$\Delta\alpha = \sinh\alpha. \tag{4.115}$$

**(3) 类时的正常曲率曲面 ($K = +1$)**

在无脐点的假定下,我们还应分为三种情况.

(3a) 主曲率为实

可取 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}$ 满足(4.92)式,取

$$\omega^1 = \cosh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u, \quad \omega^2 = \sinh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v, \tag{4.116}$$

因而

$$\omega_2^1 = \omega_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha_v \mathrm{d}u + \alpha_u \mathrm{d}v). \tag{4.117}$$

又令

$$\omega_1^3 = \sinh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u, \quad \omega_2^3 = -\cosh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v, \tag{4.118}$$

所以

$$b_{11} = \tanh\frac{\alpha}{2}, \quad b_{22} = -\coth\frac{\alpha}{2}, \tag{4.119}$$

$$K = -b_{11}b_{22} = +1. \tag{4.120}$$

满足 Codazzi 方程,又第一基本形式为

$$\mathrm{d}s^2 = (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = \cosh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2 - \sinh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2, \tag{4.121}$$

第二基本形式为

$$II = \cosh\frac{\alpha}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2), \tag{4.122}$$

Gauss 方程为

$$\alpha_{uu} - \alpha_{vv} = -\sinh\alpha. \tag{4.123}$$

(3b) 主曲率为虚

这时,我们选标架,使

$$\boldsymbol{e}_1^2 = 0, \quad \boldsymbol{e}_2^2 = 0, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_a = 0 \quad (a = 1, 2).$$

又

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} > 0.$$

从结构方程(4.81)式就得出

$$\omega_2^1 = \omega_1^2 = 0,$$

$$\omega_1^3 + \frac{1}{2}e^{\alpha}\omega_3^2 = 0, \quad \omega_2^3 + \frac{1}{2}e^{\alpha}\omega_3^1 = 0.$$

选取坐标$(u, v)$使

$$\omega^1 = du - e^{-\alpha}dv, \quad \omega^2 = -e^{-\alpha}du - dv,$$

以及

$$\omega_3^1 = \frac{1}{2}(du - e^{\alpha}dv), \quad \omega_2^3 = \frac{1}{2}(e^{\alpha}du + dv).$$

这种参数的导出可见[99]. 从而

$$\omega_1^3 = \frac{1}{2}(du - e^{\alpha}dv), \quad \omega_2^3 = \frac{1}{2}(e^{\alpha}du + dv).$$

从 $d^2\boldsymbol{r}$ 可得

$$\omega_1^1 = \alpha_u du, \quad \omega_2^2 = \alpha_v dv.$$

从此得出曲面的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$I = d\boldsymbol{r}^2 = -du^2 - 2\sinh\alpha du dv + dv^2,$$

$$II = -d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n} = -2\cosh\alpha du dv.$$

因此, $K = 1$ 且两个主曲率为虚. 从 Gauss 方程 $d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = -\omega_3^a \wedge \omega_b^3$ 就得出

$$\alpha_{uv} = \cosh\alpha,$$

并且所有的 Codazzi 方程也由这个 cosh-Gordon 方程推出. 所以从 cosh-Gordon 方程的一解,可以通过解曲面的基本方程而得出类时、Gauss 曲率为 1 而且主曲率为虚的曲面. 参数$(u, v)$称为渐近的 Chebyshev 坐标,因为这时 $u$, $v$ 曲线都是渐近曲线.

(3c) 两个主曲率相同,但只有一个主方向

仍取 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,使

$$\boldsymbol{e}_1^2 = 0, \quad \boldsymbol{e}_2^2 = 0, \quad \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}e^{\alpha}.$$

可选参数$(u, v)$,使

$$\omega^1 = du - e^{-\alpha}dv, \quad \omega^2 = -dv,$$

$$\omega_3^1 = -du - e^{-\alpha}dv, \quad \omega_3^2 = dv.$$

这时，第一、第二基本形式分别为

$$I = -\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2,$$

$$II = -\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Gauss-Codazzi 方程成为 Liouville 方程

$$\alpha_{uv} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}.$$

对于这个方程的任一解，利用基本方程就可得出这种类型的曲面.

(4) **类时的负常曲率曲面** ($K = -1$)

我们取 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}$ 满足(4.92)式

$$\omega^1 = \cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u, \quad \omega^2 = \sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v, \tag{4.124}$$

因而

$$\omega_2^1 = \omega_1^2 = \frac{1}{2}(-\alpha_v\mathrm{d}u + \alpha_u\mathrm{d}v). \tag{4.125}$$

又取

$$\omega_1^3 = \sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u, \quad \omega_2^3 = \cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v, \tag{4.126}$$

第一基本形式为

$$\mathrm{d}s^2 = (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = \cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2, \tag{4.127}$$

第二基本形式为

$$II = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2). \tag{4.128}$$

满足 Codazzi 方程，又

$$b_{11} = \tan\frac{\alpha}{2}, \quad b_{22} = \cot\frac{\alpha}{2},$$

$K = -1$, Gauss 方程

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3$$

化为

$$\Delta\alpha = \sin\alpha. \tag{4.129}$$

从此得到如下定理：

**定理 4.7**　如果知道 sine-Gordon 方程、sinh-Laplace 方程、sinh-Gordon 方程，cosh-Gordon 方程，Liouville 方程或 sine-Laplace 方程的一个非平凡解，就可分别得出 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中类空正常曲率、类空负常曲率、类时正常曲率(三种)和类时负常曲率曲面. 相反地，在 Chebyshev 坐标下，这几种曲面的 Gauss 方程化为上述各种方程.

上述结果可列表如下：

<table>
<tr><td rowspan="2">类空</td><td>$K=1$</td><td>第一基本形式：$\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2+\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>第二基本形式：$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)$<br>Gauss 方程：$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=-\sin\alpha$</td></tr>
<tr><td>$K=-1$</td><td>第一基本形式：$\cosh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2+\sinh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>第二基本形式：$\cosh\frac{\alpha}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$<br>Gauss 方程：$\Delta\alpha=\sinh\alpha$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">类时</td><td rowspan="3">$K=1$</td><td>(a) 第一基本形式：$\cosh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2-\sinh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>第二基本形式：$\cosh\frac{\alpha}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)$<br>Gauss 方程：$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=-\sinh\alpha$</td></tr>
<tr><td>(b) 第一基本形式：$-\mathrm{d}u^2-2\sinh\alpha\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$<br>第二基本形式：$-2\cosh\alpha\mathrm{d}u\mathrm{d}v$<br>Gauss 方程：$\alpha_{uv}=\cosh\alpha$</td></tr>
<tr><td>(c) 第一基本形式：$-\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$<br>第二基本形式：$-\mathrm{e}^{-\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$<br>Gauss 方程：$\alpha_{uv}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$K=-1$</td><td>第一基本形式：$\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2-\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>第二基本形式：$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$<br>Gauss 方程：$\Delta\alpha=\sin\alpha$</td></tr>
</table>

这定理中的“得出”一词意味着依 sine-Gordon 等非线性偏微分方程的解，求解曲面的基本方程(它们是完全可积的)而得出曲面. 但是为了更具体

地构作曲面,还需要解决两个问题,即(1)这些非线性偏微分方程如何显式求解?(2)如何给出这些曲面的显式表达式?为此,我们把 $\mathbf{R}^3$ 中的 Bäcklund 变换和伪球线汇推广到 $\mathbf{R}^{2,1}$ 的情形,这就是后面两节所要讨论的.

### 4.3.3　$\mathbf{R}^{2,1}$ 中的伪球线汇[51]

$\mathbf{R}^{2,1}$ 中的线汇依其直线的方向有类空、类时和类光的区别.我们要研究类时的线汇(即由类时直线所组成的线汇)和类空的线汇(即由类空直线所成的线汇).在这些线汇存在二张焦曲面的假定下,可以分为四种情形讨论:

(a) 线汇类空,二张焦曲面类空;

(b) 线汇类空,二张焦曲面类时;

(c) 线汇类时,二张焦曲面类时;

(d) 线汇类空,一张焦曲面类时,一张焦曲面类空.

现设线汇 $\Sigma$ 有两张焦曲面 $S$ 和 $S^*$ ,$PP^*$ 是 $\Sigma$ 中的直线,它是 $S$ 和 $S^*$ 的公切线,$P\in S$, $P^*\in S^*$ 是切点,$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}^*$ 分别是 $S$ 和 $S^*$ 在 $P$ 和 $P^*$ 的法线.如果

$$|PP^*|=l\quad(\text{非零常数}),\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*=k\quad(\text{非零常数}),\tag{4.130}$$

则称线汇为**伪球线汇**.文献[55]和[101]中曾考虑过相应于各种伪球线汇的 Bäcklund 变换,但不够完全,缺乏显式求解的算法.在此我们对各种可能的情况作全面的论述,而且用 Darboux 变换作曲面和线汇的显式表达式.先证明如下定理:

**定理 4.8**(推广的 Bäcklund 定理)　$\mathbf{R}^{2,1}$ 中的伪球线汇的两张焦曲面必为曲率相同的常曲率曲面,在情形(a),(b),(c),曲率为正;在情形(d),曲率为负.

**证明**　分为四种情形一一加以论证:

情形(a),线汇类空,焦曲面 $S$, $S^*$ 类空:

取 $S$ 和 $S^*$ 的正交标架 $\{P,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{n}\}$ 和 $\{P^*,\boldsymbol{e}_1^*,\boldsymbol{e}_2^*,\boldsymbol{n}^*\}$,使 $\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_1^*$ 为 $PP^*$ 方向的单位向量,此时

$$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=\boldsymbol{e}_1^{*2}=\boldsymbol{e}_2^{*2}=1,$$

$$\boldsymbol{n}^2=\boldsymbol{n}^{*2}=-1,$$

且有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2^* &= (\cosh \tau)\boldsymbol{e}_2 + (\sinh \tau)\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}^* &= (\sinh \tau)\boldsymbol{e}_2 + (\cosh \tau)\boldsymbol{n}, \end{aligned} \tag{4.131}$$

这里 $\tau = \text{const} = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^* \neq 0$(我们可设 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^* < 0$,因为 $\boldsymbol{n}^*$ 的取向可改变). 又有

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l\boldsymbol{e}_1 \quad (l = \text{const} \neq 0), \tag{4.132}$$

微分上式并将其和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = \omega^{*1}\boldsymbol{e}_1^* + \omega^{*2}\boldsymbol{e}_2^*$ 作比较,得

$$\begin{gathered} \omega^1 = -\omega^{*1}, \quad \omega^2 + l\omega_1^2 = (\cosh \tau)\omega^{*2}, \\ l\omega_1^3 = (\sinh \tau)\omega^{*2}. \end{gathered} \tag{4.133}$$

从此可见

$$(\cosh \tau)\omega_1^3 - (\sinh \tau)\omega_1^2 = \frac{\sinh \tau}{l}\omega^2. \tag{4.134}$$

又计算

$$\begin{aligned} \omega_1^{*3} &= (-\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1^*)\cdot\boldsymbol{n}^* = -\frac{\omega^2}{l}\sinh \tau, \\ \omega_2^{*3} &= (-\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2^*)\cdot\boldsymbol{n}^* = \omega_2^3, \end{aligned} \tag{4.135}$$

从而

$$\begin{aligned} -\omega_3^{*1} \wedge \omega_2^{*3} &= \omega_2^3 \wedge \left(-\frac{\omega^2}{l}\sinh \tau\right) \\ &= \frac{\sinh \tau}{l}\omega_1^3 \wedge \omega^1 = \frac{\sinh^2 \tau}{l^2}\omega^{*1} \wedge \omega^{*2}, \end{aligned} \tag{4.136}$$

所以 $S^*$ 的 Gauss 曲率 $K^* = \dfrac{\sinh^2\tau}{l^2}$. 由于 $S$ 和 $S^*$ 有同样的关联,所以 $K = \dfrac{\sinh^2\tau}{l^2}$. $S$ 和 $S^*$ 都是正常曲率曲面.

情形(b),线汇类空,焦曲面 $S$, $S^*$ 类时:

和情形(a)相类似,但这时

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_1^{*2} = 1, \quad \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_2^{*2} = -1, \quad \boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{n}^{*2} = 1, \tag{4.137}$$

且有下式成立:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1^* = -\boldsymbol{e}_1, \\
&\boldsymbol{e}_2^* = \cosh\tau\boldsymbol{e}_2 + \sinh\tau\boldsymbol{n}, \\
&\boldsymbol{n}^* = \sinh\tau\boldsymbol{e}_2 + \cosh\tau\boldsymbol{n} \quad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^* = \cosh\tau = \text{const}).
\end{aligned} \tag{4.138}
$$

由 $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l\boldsymbol{e}_1 (l = \text{const})$ 得出

$$
\begin{aligned}
&\omega^1 = -\omega^{*1}, \\
&\omega^2 + l\omega_1^2 = \cosh\tau\omega^{*2}, \\
&l\omega_1^3 = \sinh\tau\omega^{*2}.
\end{aligned} \tag{4.139}
$$

(4.138)式、(4.139)式和(4.131)式、(4.133)式相同. 此外还有

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^{*3} = (\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1^*)\cdot\boldsymbol{n}^* = -\frac{\omega^2}{l}\sinh\tau, \\
&\omega_2^{*3} = (\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2^*)\cdot\boldsymbol{n} = \omega_2^3.
\end{aligned} \tag{4.140}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
-\omega_3^{*1}\wedge\omega_2^{*3} &= \frac{\sinh\tau}{l}\omega_2^3\wedge\omega^2 = -\frac{\sinh\tau}{l}\omega_1^3\wedge\omega^1 \\
&= -\frac{\sinh^2\tau}{l^2}\omega^{*1}\wedge\omega^{*2},
\end{aligned} \tag{4.141}
$$

所以 $S$ 和 $S^*$ 是正常曲率曲面,

$$
K^* = \frac{\sinh^2\tau}{l^2}, \quad K = \frac{\sinh^2\tau}{l^2}. \tag{4.142}
$$

情形(c),线汇类时,焦曲面 $S$, $S^*$ 类时:

和(a), (b)相类似,但这时

$$
\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_1^{*2} = -1, \quad \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_2^{*2} = 1, \quad \boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{n}^{*2} = 1, \tag{4.143}
$$

且有下式成立:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1^* = -\boldsymbol{e}_1, \\
&\boldsymbol{e}_2^* = (\cos\tau)\boldsymbol{e}_2 + (\sin\tau)\boldsymbol{n}, \\
&\boldsymbol{n}^* = -(\sin\tau)\boldsymbol{e}_2 + (\cos\tau)\boldsymbol{n} \\
&(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^* = \cos\tau = \text{const} \neq 0).
\end{aligned} \tag{4.144}
$$

由 $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l\boldsymbol{e}_1$ 微分后得

$$\begin{aligned} &\omega^1 = -\omega^{*1}, \\ &\omega^2 + l\omega_1^2 = (\cos\tau)\omega^{*2}, \\ &l\omega_1^3 = (\sin\tau)\omega^{*2}, \end{aligned} \tag{4.145}$$

又由(4.144)式得知

$$\begin{aligned} &\omega_1^{*3} = -\frac{\omega^2}{l}\sin\tau, \\ &\omega_2^{*3} = \omega_2^3, \end{aligned} \tag{4.146}$$

因而

$$\begin{aligned} -\omega_3^{*1} \wedge \omega_2^{*3} &= \omega_2^3 \wedge \left(-\frac{\omega^2}{l}\sin\tau\right) = \frac{\sin\tau}{l}\omega_1^3 \wedge \omega^1 \\ &= \frac{\sin^2\tau}{l^2}\omega^{*1} \wedge \omega^{*2}, \end{aligned} \tag{4.147}$$

由(4.98)′式，可知

$$K^* = \frac{\sin^2\tau}{l^2}, \quad K = \frac{\sin^2\tau}{l^2}, \tag{4.148}$$

在这种情形下，$S$ 和 $S^*$ 必为正常曲率曲面.

情形(d)，线汇类空，焦曲面 $S$ 类时，$S^*$ 类空：

此时

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_1^{*2} = 1, \quad \boldsymbol{e}_2^2 = -1, \quad \boldsymbol{e}_2^{*2} = 1, \quad \boldsymbol{n}^2 = 1, \quad \boldsymbol{n}^{*2} = -1, \tag{4.149}$$

且有下式成立：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_1^* = -\boldsymbol{e}_1, \\ &\boldsymbol{e}_2^* = (\sinh\tau)\boldsymbol{e}_2 + (\cosh\tau)\boldsymbol{n}, \\ &\boldsymbol{n}^* = (\cosh\tau)\boldsymbol{e}_2 + (\sinh\tau)\boldsymbol{n} \\ &(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^* = \sinh\tau = \text{const}). \end{aligned} \tag{4.150}$$

由 $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l\boldsymbol{e}_1 (l = \text{const})$ 微分得

$$\begin{aligned} &\omega^1 = -\omega^{*1}, \\ &\omega^2 + l\omega_1^2 = (\sinh\tau)\omega^{*2}, \\ &l\omega_1^3 = (\cosh\tau)\omega^{*2}. \end{aligned} \tag{4.151}$$

又有

$$\omega_1^{*3} = \frac{\cosh\tau}{l}\omega^2, \quad \omega_2^{*3} = \omega_2^3 \tag{4.152}$$

成立. 因而

$$\begin{aligned} -\omega_3^{*1} \wedge \omega_2^{*3} &= \frac{\cosh\tau}{l}\omega_2^3 \wedge \omega^2 = -\frac{\cosh\tau}{l}\omega_1^3 \wedge \omega^1 \\ &= -\frac{\cosh^2\tau}{l^2}\omega^{*1} \wedge \omega^{*2}. \end{aligned} \tag{4.153}$$

所以由(4.91)式,

$$K^* = -\frac{\cosh^2\tau}{l^2}. \tag{4.154}$$

另一方面

$$\begin{aligned} -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3 &= -\omega_2^{*3} \wedge \frac{\cosh\tau}{l}\omega^{*2} \\ &= \frac{\cosh\tau}{l}\omega_1^{*3} \wedge \omega^{*1} \\ &= \frac{\cosh^2\tau}{l}\omega^1 \wedge \omega^2, \end{aligned} \tag{4.155}$$

从而,由(4.98)式,

$$K = -\frac{\cosh^2\tau}{l^2}. \tag{4.156}$$

定理证毕. ∎

这个定理未必说明四种情况都能真正出现,因为它并没有给出存在性的证明. 在下一节中,将进一步讨论存在性的问题.

### 4.3.4　$\mathbf{R}^{2,1}$ 中常曲率曲面的 Bäcklund 变换和 Darboux 变换[53]

现在讨论从 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中的常曲率曲面 $S$ 出发,利用伪球线汇来构作新的常曲率曲面的方法,这也是各种伪球线汇的存在性的检验,这是经典的 Bäcklund 变换的推广. 还可以利用 Darboux 变换把这一分析过程算法化和代数化,其方法和 § 4.2 中的类似,不过由下文可见,各种情形各有特色. 我们仍然按上节中的各种情况分析进行讨论.

**(1) $S$ 为类空的正常曲率曲面,线汇类空**

引入 Chebyshev 标架 $\{P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}\}$, $P$ 的位置向量为 $\boldsymbol{r}$. 如果存在 Bäcklund 变换,使另一焦曲面为类空的 $S^*$,就应有

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2) \quad (l = \text{const} \neq 0). \tag{4.157}$$

$S^*$ 的法线 $\boldsymbol{n}^*$ 和 $\boldsymbol{PP}^*$ 相垂直,且为类时向量,所以

$$\boldsymbol{n}^* = \sinh\tau(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)+\cosh\tau\boldsymbol{n}$$

$$(\tau=\text{const}\neq 0). \tag{4.158}$$

微分 $\boldsymbol{r}^*$ 并应用基本方程和类空正常曲率曲面的有关表示式(4.99)式~(4.101)式,则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = & \left\{\left[\cos\frac{\alpha}{2}-l\sin\theta\left(\theta_u+\frac{\alpha_v}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_1+l\cos\theta\left(\theta_u+\frac{\alpha_v}{2}\right)\boldsymbol{e}_2\right.\\ & \left.+l\cos\theta\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}u+\left\{-l\sin\theta\left(\theta_v+\frac{\alpha_u}{2}\right)\boldsymbol{e}_1\right.\\ & \left.+\left[\sin\frac{\alpha}{2}+l\cos\theta\left(\theta_v+\frac{\alpha_u}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_2-l\sin\theta\cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{4.159}$$

根据条件 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*\cdot\boldsymbol{n}^*=0$, 并令 $\theta=\alpha_1/2$, 则有下式成立:

$$\begin{aligned} l(\alpha'_u+\alpha_v) &= 2\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\cosh\tau\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha}{2},\\ l(\alpha'_v+\alpha_u) &= -2\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}-2\cosh\tau\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.\end{aligned} \tag{4.160}$$

这里已设 $K=1$, 因而 $l=\sinh\tau$. (4.160)式是关于 $\alpha_1$ 的偏微分方程组,经过一定的计算,可见它的可积条件就是

$$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=-\sin\alpha, \tag{4.161}$$

它正好是(4.107)式,因而已经满足. 从而得以下定理:

**定理 4.9** 以两张类空正常曲率曲面为焦曲面的类空伪球线汇是存在的.

我们可以依照本章 §4.2 中的方法,证明$(u, v)$也是 $S^*$ 的 Chebyshev 坐标,而且可以利用 sine-Gordon 方程的 Darboux 变换作出一系列的正常曲率曲面,只要对应于 $\alpha$ 的一个正常曲率曲面在 Chebyshev 坐标下的表示形式和 Lax 对解为已知,这种算法就是纯代数的. 要注意的是,在现在情况下,作 Darboux 变换时,参数 $u$, $v$ 要变一下,即令 $\xi=\dfrac{u-v}{2}$, $\eta=\dfrac{u+v}{2}$, 使得

(4.161)式转化为标准形式的 sine-Gordon 方程(4.66)式.

**(2) $S$ 为类时的正常曲率曲面**

可细分为几种情形.

(2a) $S$ 的两个主曲率为实,且不相同.

取 Chebyshev 坐标,有

$$\begin{aligned} &\omega^1 = \cosh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u, \quad \omega^2 = \sinh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v, \\ &\omega_2^1 = \omega_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha_v \mathrm{d}u + \alpha_u \mathrm{d}v), \\ &\omega_1^3 = \sinh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u, \ \omega_2^3 = -\cosh\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v, \end{aligned} \tag{4.162}$$

和

$$\boldsymbol{e}_1^2 = 1, \quad \boldsymbol{e}_2^2 = -1, \quad \boldsymbol{n}^2 = 1.$$

($2a_1$) 现作类空的 Bäcklund 变换,$S^*$ 的方程应为

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l(\cosh\theta\boldsymbol{e}_1 + \sinh\theta\boldsymbol{e}_2), \tag{4.163}$$

其法线应有表达式

$$\boldsymbol{n}^* = \sinh\tau(\sinh\theta\boldsymbol{e}_1 + \cosh\theta\boldsymbol{e}_2) + \cosh\tau\boldsymbol{n}. \tag{4.164}$$

假设 $K = 1$, 依定理 4.8 的证明, $l = \sinh\tau$. 这时

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = &\left\{\left[\cosh\frac{\alpha}{2} + l\sinh\theta\left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_1 + l\cosh\theta\left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2}\right)\boldsymbol{e}_2\right. \\ &\left. + l\cosh\theta\sinh\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}u + \left\{l\sinh\theta\left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\right)\boldsymbol{e}_1\right. \\ &\left. + \left[\sinh\frac{\alpha}{2} + l\cosh\theta\left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_2 - l\sinh\theta\cosh\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{4.165}$$

由条件 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* \cdot \boldsymbol{n}^* = 0$ 可得

$$\begin{aligned} &l\left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2}\right) = \sinh\theta\cosh\frac{\alpha}{2} + \cosh\tau\cosh\theta\sinh\frac{\alpha}{2}, \\ &l\left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\right) = -\cosh\theta\sinh\frac{\alpha}{2} - \cosh\tau\sinh\theta\cosh\frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{4.166}$$

把它们看成 $\theta\left(=\frac{\alpha_1}{2}\right)$ 的偏微分方程组,其可积条件为

$$\alpha_{vv}-\alpha_{uu}=\sinh\alpha, \tag{4.167}$$

这就是 $S$ 的 Gauss 方程,因而是成立的,且易见 $S^*$ 也是类时的,所以这种类型的伪球线汇是存在的. 故由定理 4.8 可见,$S^*$ 的曲率也为 $+1$.

同样可证$(u, v)$也是 $S^*$ 的 Chebyshev 坐标,又 $\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$ 的表达式也可明显写出来.

为了能利用 Darboux 变换显式作出 $S^*$,要讨论 sinh-Gordon 方程的 Darboux 变换. 令

$$\xi=\frac{u+v}{2},\quad \eta=\frac{v-u}{2}, \tag{4.168}$$

方程(4.123)式化为

$$\alpha_{\xi\eta}=\sinh\alpha, \tag{4.169}$$

它有 Lax 对

$$\Phi_\xi=\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-\alpha}\\ \mathrm{e}^{\alpha} & 0\end{pmatrix}\Phi,\quad \Phi_\eta=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\alpha_\eta & \frac{1}{\lambda}\\ \frac{1}{\lambda} & \alpha_\eta\end{pmatrix}\Phi, \tag{4.170}$$

这就是说,(4.170)式的可积条件就是(4.169)式.

设 $\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$ 是 Lax 对(4.170)式的对应于 $\lambda=\lambda_1$ 的列向量解,则 $\begin{pmatrix}h_1\\-h_2\end{pmatrix}$ 是 Lax 对(4.170)式的对应于 $\lambda=-\lambda_1$ 的列向量解. 令 $H=\begin{pmatrix}h_1 & h_1\\ h_2 & -h_2\end{pmatrix}$,又设 $h_1$, $h_2\neq 0$, 此时,Darboux 阵 $D(\lambda)$取形式

$$D(\lambda)=I-\lambda H\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\lambda_1}\end{pmatrix}H^{-1}=I-\frac{\lambda}{\lambda_1}\begin{pmatrix}0 & \frac{h_1}{h_2}\\ \frac{h_2}{h_1} & 0\end{pmatrix}. \tag{4.171}$$

可以通过演算验证

$$\mathrm{e}^{\alpha_1}=\mathrm{e}^{-\alpha}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2,\quad \Phi_1=D(\lambda)\Phi \tag{4.172}$$

所定义的$(\alpha_1, \Phi_1)$仍然使 Lax 对(4.170)式成立,因而 $\alpha_1$ 满足(4.169)式,而

$(\alpha, \Phi) \longrightarrow (\alpha_1, \Phi_1)$ 就是方程(4.169)式的 Darboux 变换. 在实现 Bäcklund 变换(4.163)式时,所需要的是 $\cosh\frac{\alpha_1}{2}$ 和 $\sinh\frac{\alpha_1}{2}$,因此,算法是纯代数的.

现在讨论 Darboux 变换(4.172)式和 Bäcklund 变换方程(4.166)式的关系:

令 $\theta = \alpha_1/2$, 注意到将(4.168)式、(4.166)式的两式相加及相减就得出

$$
\begin{aligned}
l\left(\frac{\alpha_{1\xi}}{2} + \frac{\alpha_\xi}{2}\right) &= (1 - \cosh\tau)\sinh\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}, \\
l\left(\frac{\alpha_{1\eta}}{2} - \frac{\alpha_\eta}{2}\right) &= -(1 + \cosh\tau)\sinh\frac{\alpha_1 + \alpha}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.173}
$$

另一方面,由 $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ 满足 Lax 对(4.170)式可见:

$$
\begin{aligned}
(\ln|h_1|)_\xi &= \frac{\lambda_1}{2}e^{-\alpha}\frac{h_2}{h_1}, \\
(\ln|h_2|)_\xi &= \frac{\lambda_1}{2}e^{\alpha}\frac{h_1}{h_2}, \\
(\ln|h_1|)_\eta &= -\frac{\alpha_\eta}{2} + \frac{1}{2\lambda_1}\frac{h_2}{h_1}, \\
(\ln|h_2|)_\eta &= \frac{1}{2\lambda_1}\frac{h_1}{h_2} + \frac{1}{2}\alpha_\eta.
\end{aligned}
\tag{4.174}
$$

取 $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ 使 $\frac{h_2}{h_1}$ 为正(为负时可类似处理),于是由(4.172)式可得出

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1\xi} + \alpha_\xi &= (2\ln|h_2|)_\xi - (2\ln|h_1|)_\xi = \lambda_1\left(e^{\alpha}\frac{h_1}{h_2} - e^{-\alpha}\frac{h_2}{h_1}\right) \\
&= -2\lambda_1\sinh\frac{\alpha_1 - \alpha}{2},
\end{aligned}
\tag{4.175}
$$

同样可有

$$
\alpha_{1\eta} + \alpha_\eta = 2\alpha_\eta + \frac{1}{\lambda_1}\left(e^{-(\alpha_1+\alpha)/2} - e^{(\alpha+\alpha_1)/2}\right),
$$

或

$$
\alpha_{1\eta} - \alpha_\eta = -\frac{2}{\lambda_1}\sinh\frac{\alpha_1 + \alpha}{2},
\tag{4.176}
$$

其中 $\lambda_1 = \dfrac{-1+\cosh\tau}{l}$. 由于 $l=\sinh\tau$, $\lambda_1^{-1} = \dfrac{1+\cosh\tau}{\sinh\tau}$,

(4.175)式和(4.176)式就化为(4.173)式.

我们从 $\alpha = 0$ 出发,解 Lax 对

$$\Phi_\zeta = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Phi, \quad \Phi_\eta = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Phi \tag{4.177}$$

得到

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix}\cosh\gamma & \sinh\gamma\\ \sinh\gamma & \cosh\gamma\end{pmatrix} \quad \left(\gamma = \frac{\lambda}{2}\zeta + \frac{1}{2\lambda}\eta\right). \tag{4.178}$$

令

$$h_1 = \cosh\gamma_1,\ h_2 = \sinh\gamma_1 \quad \left(\gamma_1 = \frac{\lambda_1}{2}\xi + \frac{1}{2\lambda_1}\eta\right), \tag{4.179}$$

依(4.171)式得到 Darboux 阵

$$D(\lambda) = I - \frac{\lambda}{\lambda_1}\begin{pmatrix}0 & \coth\gamma_1\\ \tanh\gamma_1 & 0\end{pmatrix}, \tag{4.180}$$

从而

$$\begin{aligned}\Phi_1(\lambda) &= D(\lambda)\Phi(\lambda)\\ &= \begin{pmatrix}\cosh\gamma - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\coth\gamma_1\sinh\gamma & \sinh\gamma - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\coth\gamma_1\cosh\gamma\\ \sinh\gamma - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\tanh\gamma_1\cosh\gamma & \cosh\gamma - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\tanh\gamma_1\sinh\gamma\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.181}$$

选 $\lambda_2 > 0$ $(\lambda_2 \neq \lambda_1)$, 令 $\gamma_2 = \dfrac{\lambda_2}{2}\xi + \dfrac{1}{2\lambda_2}\eta$, 取

$$\begin{aligned}\tilde{h}_1 &= \cosh\gamma_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\coth\gamma_1\sinh\gamma_2,\\ \tilde{h}_2 &= \sinh\gamma_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\tanh\gamma_1\cosh\gamma_2,\end{aligned} \tag{4.182}$$

则

$$e^{\alpha_2} = e^{-\alpha_1}\left(\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}\right)^2$$

给出一个新解 $\alpha_2$. 据此,还可继续作出解的系列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$.

为构作曲面,从 $\alpha=0$ 出发解基本方程得标架系,选取适当坐标,有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}=(u,\ 0,\ 0),\ \boldsymbol{e}_1=(1,\ 0,\ 0),\\&\boldsymbol{e}_2=(0,\ \sinh v,\ \cosh v),\ \boldsymbol{n}=(0,\ -\cosh v,\ -\sinh v),\end{aligned}\tag{4.183}$$

然后由定理 4.8,利用 $\alpha_1$,运用(4.163)式可得到一个类时的负常曲率 $(-1)$ 曲面. 我们可继续利用 $\alpha_2$, $\alpha_3$, …作出这样曲面的系列.

($2a_2$) 从同一 $S$ 出发,可作类时的 Bäcklund 变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}^* &=\boldsymbol{r}+l\left(\sinh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1+\cosh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right),\\\boldsymbol{n}^* &=\sin\tau\left(\cosh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1+\sinh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)+\cos\tau\boldsymbol{n}.\end{aligned}\tag{4.184}$$

这里 $l$, $\tau$ 是常数, $\sin\tau=l\neq 0$.

作 $d\boldsymbol{r}^*$,根据条件 $\boldsymbol{n}^*\cdot d\boldsymbol{r}^*=0$, 经过计算,得到和(4.166)式相类似的方程

$$\begin{aligned}l\left(\frac{\alpha_{1u}}{2}+\frac{\alpha_v}{2}\right)&=-\cosh\frac{\alpha_1}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}+\cos\tau\sinh\frac{\alpha_1}{2}\sinh\frac{\alpha}{2},\\l\left(\frac{\alpha_{1v}}{2}+\frac{\alpha_u}{2}\right)&=\sinh\frac{\alpha_1}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}+\cos\tau\cosh\frac{\alpha_1}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}\tag{4.185}$$

这就是从 $\alpha$ 到 $\alpha_1$ 的 Bäcklund 变换. 如把它们视作 $\alpha_1$ 的方程,则其可积条件为已经成立的

$$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=-\sinh\alpha,\tag{4.186}$$

从而 $S$ 到 $S^*$ 的 Bäcklund 变换可由解这个完全可积的方程组完成. 在知道 $S$ 的表达式及相应 sinh-Gordon 方程解的 Lax 对的基本解(或 $S$ 的 Lie 变换)之后,$S^*$ (及其 Lie 变换)就可以用 Darboux 变换以代数的算法来完成.

(2b) 现设 $S$ 的两个主曲率为虚,其正交标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{n}\}$ 和参数 $(u,\ v)$以及 $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega_j^i(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$已在 § 4.3.2 的(3b)中取定.

($2b_1$) 现在构作 $S$ 的类时的 Bäcklund 变换. 令 $S^*$ 的表达式为

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2),$$

这里 $l$ 是非零常数, $abe^{\alpha}=-1$. 后一式表明,$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^*$ 是类时的直线,且

$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^*)^2 = -l^2$. 现要求 $S^*$ 的法向为

$$\boldsymbol{n}^* = (a\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2)\cos\tau + \boldsymbol{n}\sin\tau,$$

这里 $\sin\tau = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^* = \text{const}$. 又令 $l = \cos\tau$, 计算 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*$ ,我们得出

$$\boldsymbol{r}_u^* = \left(1 - la\frac{b_u}{b}\right)\boldsymbol{e}_1 + (-\mathrm{e}^{-\alpha} + lb_u)\boldsymbol{e}_2 + \frac{l}{2}(a - a^{-1})\boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{r}_v^* = (-\mathrm{e}^{-\alpha} + la_v)\boldsymbol{e}_1 + \left(-1 - lb\frac{a_v}{a}\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{l}{2}(b + b^{-1})\boldsymbol{n}. \tag{4.187}$$

$\boldsymbol{n}^*$ 为 $S^*$ 的法线的条件为 $\boldsymbol{n}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = 0$, 写开来就是

$$2b^{-1}b_u = -\mu(a - a^{-1}),\quad 2a^{-1}a_v = -\frac{1}{\mu}(b + b^{-1}), \tag{4.188}$$

这里 $\mu = \sec\tau - \tan\tau$.

引入函数 $\alpha_1$ 使

$$a = \exp\frac{\alpha_1 - \alpha}{2},\quad b = -\exp\frac{-\alpha_1 - \alpha}{2},$$

我们就会得出

$$(\alpha_1 + \alpha)_u = 2\mu\sinh\frac{\alpha_1 - \alpha}{2},\quad (\alpha_1 - \alpha)_v = \frac{2}{\mu}\cosh\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}. \tag{4.189}$$

这就是 cosh-Gordon 方程的 Bäcklund 变换方程,它关于 $\alpha_1$ 的可积条件就是 $\alpha$ 满足 cosh-Gordon 方程. 作为 $S$ 的 Gauss 方程,它已经成立,因而通过 $\alpha_1$ 就能得出 $S^*$ ,而且由 Bäcklund 定理知 $S^*$ 是类时的正常曲率曲面 $(K = 1)$, 此外通过复杂的计算可以知道 $(u, v)$ 同时也是 $S^*$ 的 Chebyshev 渐近坐标.

和一般的情况相类似,我们希望通过 Darboux 变换来求 $\alpha_1$ 的显式表达式. 为此,我们先证明

**引理 4.1**　cosh-Gordon 方程的 Lax 对为

$$\Phi_u = U\Phi = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\alpha} \\ \mathrm{e}^{\alpha} & 0 \end{pmatrix}\Phi,\quad \Phi_v = V\Phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha_v & \lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} & \alpha_v \end{pmatrix}\Phi. \tag{4.190}$$

**证明** 直接计算零曲率条件

$$U_v - V_u + (U, V) = 0$$

就得出 cosh-Gordon 方程.

现在叙述 Darboux 阵的构作. 先注意到(i)如果 $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ 是 Lax 对当 $\lambda = \lambda_0$ 时的解,那么 $\begin{pmatrix} -h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ 就是 Lax 对当 $\lambda = -\lambda_0$ 时的解;(ii)取 $\lambda$ 为纯虚,$h_2/h_1$ 在一点$(u_0, v_0)$为纯虚,那么它在$(u_0, v_0)$的一个邻域中是纯虚的. 前一事实(i)是显然的. (ii)的证明如下:

从 Lax 对可见,

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_u = \frac{\lambda_0}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\right),$$

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_v = \frac{1}{2\lambda_0} + \alpha_v\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{1}{2\lambda_0}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2.$$

记 $A = \frac{h_2}{h_1} + \frac{\overline{h}_2}{\overline{h}_1}$, 易见

$$A_u = \frac{\overline{\lambda}_0}{2}e^{-\alpha}\left(\frac{\overline{h}_2}{\overline{h}_1} - \frac{h_2}{h_1}\right)A,$$

$$A_v = \alpha_v A + \frac{1}{2\overline{\lambda}_0}\left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{\overline{h}_2}{\overline{h}_1}\right)A.$$

所以如 $A$ 在$(u_0, v_0)$为 0,则在$(u_0, v_0)$的连通邻域中为 0.

我们运用 Darboux 阵的一般公式作 Darboux 变换

$$\Phi_1 = \left(I - \frac{\lambda}{\lambda_0} H \begin{pmatrix} \lambda_0^{-1} & 0 \\ 0 & -\lambda_0^{-1} \end{pmatrix} H^{-1}\right)\Phi$$

$$= \left(I + \frac{\lambda}{\lambda_0}\begin{pmatrix} 0 & h_1/h_2 \\ -h_2/h_1 & 0 \end{pmatrix}\right)\Phi,$$

式中

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & -h_1 \\ h_2 & h_2 \end{pmatrix}.$$

根据

$$\Phi_{1u}=\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{e}^{\alpha_1}\\ \mathrm{e}^{\alpha_1} & 0\end{pmatrix}\Phi_1$$

可得出

$$\mathrm{e}^{\alpha_1}=-\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\mathrm{e}^{-\alpha}.$$

这就是 $\alpha_1$ 的显式表示，从此又得出 $S^*$ 的显式表示，并且可以证明这里的 $\alpha_1$ 就是 Bäcklund 变换方程的解.

由此便得到 $S$ 的 Bäcklund 变换的显式公式.

(2b₂) 现在构作 $S$ 的类空的 Bäcklund 变换. $S^*$ 的表达式仍为

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2),$$

但此时 $ab\mathrm{e}^{\alpha}=1$. $\boldsymbol{n}^*$ 的表达式为

$$\boldsymbol{n}^*=(a\boldsymbol{e}_1-b\boldsymbol{e}_2)\sinh\tau+\boldsymbol{n}\cosh\tau,$$

计算得

$$\boldsymbol{r}_u^*=\left(1-la\frac{b_u}{b}\right)\boldsymbol{e}_1+(-\mathrm{e}^{-\alpha}+lb_u)\boldsymbol{e}_2+\frac{l}{2}(a+a^{-1})\boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{r}_v^*=(-\mathrm{e}^{-\alpha}+la_v)\boldsymbol{e}_1+\left(-1-lb\frac{a_v}{a}\right)\boldsymbol{e}_2+\frac{l}{2}(b-b^{-1})\boldsymbol{n}. \tag{4.191}$$

令 $l=\sinh\tau$. 从条件 $\boldsymbol{n}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*=0$ 得出

$$\frac{2b_u}{b}=\mu(a+a^{-1}),\quad \frac{2a_u}{a}=-\frac{1}{\mu}(b-b^{-1}),$$

这里 $\mu=\operatorname{csch}\tau-\coth\tau$. 令

$$a=\exp\frac{-\alpha_1-\alpha}{2},\quad b=\exp\frac{\alpha_1-\alpha}{2},$$

我们得出 cosh-Gordon 方程的 Bäcklund 变换方程

$$(\alpha_1-\alpha)_u=2\mu\cosh\frac{\alpha_1+\alpha}{2},\quad (\alpha_1+\alpha)_v=\frac{2}{\mu}\sinh\frac{\alpha_1-\alpha}{2}. \tag{4.192}$$

如果把 $\mu$ 改为 $\mu^{-1}$，这就是式(4.189). 利用 Darboux 变换，就可以得出 $\alpha_1$

的显式表达式，完成了从 $S$ 到 $S^*$ 的 Bäcklund 变换的显式运算.

(2c) 现设 $S$ 的两个主曲率相等，但主方向只张成一维向量空间.

这时可依 § 4.3.2 的(3c)选取标架$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n})$和参数$(u, v)$，即成立

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = 0, \quad \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha},$$

$$\omega^1 = \mathrm{d}u - \mathrm{e}^{-\alpha}\mathrm{d}v, \quad \omega^2 = -\mathrm{d}v,$$

$$\omega_3^1 = -\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{-\alpha}\mathrm{d}v, \quad \omega_3^2 = \mathrm{d}v.$$

从此可见，

$$I = -\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2, \quad II = -\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Gauss-Codazzi 方程化为 Liouville 方程

$$\alpha_{uv} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}.$$

对 $S$ 作类时的 Bäcklund 变换

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2), \quad ab\mathrm{e}^{\alpha} = -1.$$

$$\boldsymbol{n}^* = (a\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2)\cos\tau + \boldsymbol{n}\sin\tau.$$

通过一定计算后，从条件 $\boldsymbol{n}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = 0$ 就得出

$$(\alpha_1 + \alpha)_u = -\mu\exp\frac{\alpha - \alpha_1}{2}, \quad (\alpha_1 - \alpha)_v = \frac{2}{\mu}\cosh\frac{\alpha_1 + \alpha}{2}.$$

Liouville 方程的 Lax 对为

$$\Phi_u = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{\alpha} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \quad \Phi_v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha_v & \lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} & \alpha_v \end{pmatrix}\Phi, \tag{4.193}$$

这样可以运用 Darboux 变换构作 $S^*$ 的显式表达式.

类空的 Bäcklund 变换由

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2), \quad ab\mathrm{e}^{\alpha} = 1$$

定义，可类似地利用 Darboux 变换构作 $S^*$.

总结以上论述，我们得到如下定理.

**定理 4.10**　设 $S$ 为类时的正常曲率曲面，无脐点，则存在类时和类

空的 Bäcklund 线汇,以 $S$ 为焦曲面,其另一焦曲面 $S^*$ 也是类时的正常曲率曲面.

(3) **两个焦曲面一为类时、一为类空的类空伪球线汇**

设 $S$ 为类时负常曲率 (=−1) 的曲面,取 Chebyshev 坐标及相应的标架,则(4.92)式和(4.124)式~(4.126)式成立. 依类空的伪球线汇作 Bäcklund 变换:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}^* &= \boldsymbol{r} + l(\cosh\theta\boldsymbol{e}_1 + \sinh\theta\boldsymbol{e}_2) \quad (l = \cosh\tau), \\ \boldsymbol{n}^* &= \cosh\tau(\sinh\theta\boldsymbol{e}_1 + \cosh\theta\boldsymbol{e}_2) + \sinh\tau\boldsymbol{n}, \end{aligned} \tag{4.194}$$

依 $S$ 的基本方程和可积条件,利用(4.124)式~(4.126)式得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = &\left\{\left[\cos\frac{\alpha}{2} + l\sinh\theta\left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_1 + l\cosh\theta\left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2}\right)\boldsymbol{e}_2\right. \\ &\left. + l\cosh\theta\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}u + \left\{l\sinh\theta\left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\right)\boldsymbol{e}_1\right. \\ &\left. + \left[\sin\frac{\alpha}{2} + l\cosh\theta\left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_2 + l\sinh\theta\cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{4.195}$$

根据 $\boldsymbol{n}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = 0$, 得

$$\begin{aligned} &\sinh\theta\left(\cos\frac{\alpha}{2} + l\sinh\theta\left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2}\right)\right) \\ &\quad - l\cosh^2\theta\left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2}\right) + \sinh\tau\cosh\theta\sin\frac{\alpha}{2} = 0, \\ &l\sinh^2\theta\left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\right) - \cosh\theta\left(\sin\frac{\alpha}{2} + l\cosh\theta\left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\right)\right) \\ &\quad + \sinh\tau\sinh\theta\cos\frac{\alpha}{2} = 0, \end{aligned} \tag{4.196}$$

即

$$\begin{aligned} l\left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2}\right) &= \sinh\theta\cos\frac{\alpha}{2} + \sinh\tau\cosh\theta\sin\frac{\alpha}{2}, \\ l\left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\right) &= -\cosh\theta\sin\frac{\alpha}{2} + \sinh\tau\sinh\theta\cos\frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{4.197}$$

这时 $l = \cosh\tau$, 通过计算可知,求解 $\theta$ 的可积条件为

$$\Delta\alpha = \sin\alpha, \tag{4.198}$$

它正好满足,此时对任何初始条件 $\theta = \theta_0(u = u_0,\ v = v_0)$,解 $\theta$ 必存在,而且它满足

$$\Delta\alpha_1 = \sinh\alpha_1,$$

这里 $\alpha_1 = \theta/2$. 这表明相应的伪球线汇存在,已如所知 $\boldsymbol{r}^*$ 为类空的负常曲率曲面.

**定理 4.11**　两个焦曲面分别是类时和类空的负常曲率曲面的伪球线汇是存在的,这线汇是类空的.

下面要证明$(u,\ v)$也是类空负常曲率曲面 $S^*$ 的 Chebyshev 坐标. 事实上,依(4.195)式,$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*$ 的表达式可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = \omega^{*1}\boldsymbol{e}_1^* + \omega^{*2}\boldsymbol{e}_2^*, \tag{4.199}$$

$$\omega^{*1} = \cosh\theta,\quad \omega^{*2} = \sinh\theta \tag{4.200}$$

的形式,式中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1^* = \frac{1}{\cosh\theta}\Big\{&\Big[\cos\frac{\alpha}{2} + l\sinh\theta\Big(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2}\Big)\boldsymbol{e}_1 \\
&+ l\sinh\theta\Big(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2}\Big)\Big]\boldsymbol{e}_2 + l\sinh\theta\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\Big\},
\end{aligned} \tag{4.201}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_2^* = \frac{1}{\sinh\theta}\Big\{&l\sinh\theta\Big(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\Big)\boldsymbol{e}_1 \\
&+ \Big[\sin\frac{\alpha}{2} + l\cosh\theta\Big(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2}\Big)\Big]\boldsymbol{e}_2 + l\sinh\theta\cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{n}\Big\}.
\end{aligned}$$

利用(4.197)式,经过一系列的计算,可知

$$\boldsymbol{e}_1^{*2} = 1,\quad \boldsymbol{e}_2^{*2} = 1,\quad \boldsymbol{e}_1^*\cdot\boldsymbol{e}_2^* = 0. \tag{4.202}$$

经直接计算可知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}^* = \omega_1^{*3}\boldsymbol{e}_1^* + \omega_2^{*3}\boldsymbol{e}_2^*, \tag{4.203}$$

而

$$\begin{aligned}
\omega_1^{*3} &= \sinh\theta\mathrm{d}u, \\
\omega_2^{*3} &= \cosh\theta\mathrm{d}v.
\end{aligned} \tag{4.204}$$

再令 $\theta = \alpha_1/2$, 就知道 $S^*$ 以$(u,\ v)$为 Chebyshev 坐标,而且 $\alpha_1$ 满足

$$\Delta\alpha_1 = \sinh\alpha_1. \tag{4.205}$$

如果从类空的负常曲率曲面 $S^*$ 出发，通过相反的过程，就会得到类时的负常曲率曲面 $S$.

上面没有给出 sine-Laplace 和 sinh-Laplace 方程的直接到自身的 Bäcklund 变换，却给出了两个方程的解之间相互的 Bäcklund 变换（文献[54]中给出了这种变换的微分方程形式），所以把这种变换进行两次，就是这两个方程的到自身的变换. 以下指出，这种变换的显式形式可以由 Darboux 变换作出[51].

先引入复变量

$$\zeta = \frac{u+\mathrm{i}v}{2}, \quad \bar{\zeta} = \frac{u-\mathrm{i}v}{2}, \tag{4.206}$$

因而

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\partial}{\partial u} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial v},\\&\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = \Delta.\end{aligned} \tag{4.207}$$

引进 Lax 对

$$\begin{aligned}\Phi_\zeta &= \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{e}^{-\alpha}\\ \mathrm{e}^{\alpha} & 0\end{pmatrix}\Phi,\\ \Phi_{\bar{\zeta}} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\alpha_{\bar{\zeta}} & 1/\lambda\\ -1/\lambda & \alpha_{\bar{\zeta}}\end{pmatrix}\Phi,\end{aligned} \tag{4.208}$$

其可积条件就是

$$\Delta\alpha = \alpha_{\zeta\bar{\zeta}} = \sinh\alpha. \tag{4.209}$$

现在 $\alpha$ 可以取复值，这方程就称为复化的 sinh-Gordon 方程. 如 $\alpha$ 取实值，它就是 sinh-Laplace 方程，如 $\alpha$ 取纯虚值 $\alpha = \mathrm{i}\beta$（$\beta$ 实值），它就是 sine-Laplace 方程

$$\Delta\beta = \beta_{\zeta\bar{\zeta}} = \sin\beta.$$

对复的 sinh-Laplace 方程，可以和实的 sinh-Gordon 方程一样作 Darboux 变换 $(\alpha, \Phi) \longrightarrow (\alpha_1, \Phi_1)$，只是将$(\xi, \eta)$改为$(\zeta, \bar{\zeta})$就可以了. 但我们已把 Lax 对(4.170)式作了一点小的修改，这是为后文方便而作的.

取 $\lambda = \lambda_1 \neq 0$，设 $\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$ 为相应的列向量解，那么 $\begin{pmatrix}-h_1\\ h_2\end{pmatrix}$ 为对应 $\lambda = -\lambda_1$

的列向量解，令

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & -h_1 \\ h_2 & h_2 \end{pmatrix},$$

$$S = H\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & -1/\lambda_1 \end{pmatrix}H^{-1} = \frac{1}{\lambda_1}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{h_1}{h_2} \\ \dfrac{h_2}{h_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(\lambda) = I - \lambda S = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_1}{h_2} \\ -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_2}{h_1} & 1 \end{pmatrix},$$

由此得出 Darboux 变换的公式为

$$\Phi_1(\lambda) = D(\lambda)\Phi(\lambda).$$

这里 $\alpha_1$ 仍然由(4.172)式确定，但已经复化了，由

$$e^{\alpha_1} = -e^{-\alpha}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \tag{4.210}$$

确定.

假设 $\alpha$ 是实值，为使 $\alpha_1$ 是纯虚值，其充要条件是

$$\left|\frac{h_2}{h_1}\right|^2 e^{-\alpha} = 1. \tag{4.211}$$

现在证明，这种 $h_1$，$h_2$ 是能够取到的. 现取 $\lambda = \lambda_1$，使 $|\lambda_1| = 1$. 根据 Lax 对，则有

$$\begin{aligned} &h_{1\xi} = -\frac{\lambda_1}{2}e^{-\alpha}h_2, \quad h_{2\xi} = \frac{\lambda_1}{2}e^{\alpha}h_1, \\ &h_{1\bar{\xi}} = -\frac{1}{2}\alpha_{\bar{\xi}}h_1 + \frac{1}{2\lambda_1}h_2, \quad h_{2\bar{\xi}} = -\frac{1}{2\lambda_1}h_1 + \frac{\alpha_{\bar{\xi}}}{2}h_2, \end{aligned} \tag{4.212}$$

取共轭，还有

$$\begin{aligned} &\bar{h}_{1\xi} = -\frac{1}{2}\alpha_{\xi}\bar{h}_1 + \frac{1}{2\bar{\lambda}_1}\bar{h}_2, \quad \bar{h}_{2\xi} = -\frac{1}{2\bar{\lambda}_1}\bar{h}_1 + \frac{\alpha_{\xi}}{2}\bar{h}_2, \\ &\bar{h}_{1\bar{\xi}} = -\frac{\bar{\lambda}_1}{2}e^{-\alpha}\bar{h}_2, \quad \bar{h}_{2\bar{\xi}} = \frac{\bar{\lambda}_1}{2}e^{\alpha}\bar{h}_1. \end{aligned} \tag{4.213}$$

令

$$A=\left|\frac{h_2}{h_1}\right|^2 e^{-\alpha}-1=\frac{h_2\bar{h}_2}{h_1\bar{h}_1}e^{-\alpha}-1, \tag{4.214}$$

则

$$A_\zeta=-\frac{h_2\bar{h}_2}{h_1\bar{h}_1}e^{-\alpha}\alpha_\zeta+e^{-\alpha}\left[\frac{h_2\bar{h}_{2\zeta}+h_{2\zeta}\bar{h}_2}{h_1\bar{h}_1}-\frac{h_2\bar{h}_2(h_1\bar{h}_{1\zeta}+h_{1\zeta}\bar{h}_1)}{(h_1\bar{h}_1)^2}\right].$$

利用(4.212)式和(4.213)式,经过计算,得

$$A_\zeta=\frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{h_2}{h_1}e^{-\alpha}-\frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1}\right)A, \tag{4.215}$$

同样有

$$A_{\bar{\zeta}}=\frac{\bar{\lambda}_1}{2}\left(\frac{h_2}{h_1}-\frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1}e^{-\alpha}\right)A. \tag{4.216}$$

所以,如果取 $h_1$, $h_2$ 在某一点的值(初始值),使 $A=0$(这是可以取到的),则 $A$ 处处为 0,即(4.211)式成立. 有如下定理:

**定理 4.12** 设 $\alpha$ 为实值,如果取 $\lambda_1$ 使 $|\lambda_1|=1$,又取 $h_1$, $h_2$,使满足(4.211)式,则所定义的 Darboux 变换使得 $\alpha_1$ 为纯虚值.

这就是 sinh-Laplace 方程的解到 sine-Laplace 方程的解的 Darboux 变换.

假设 $\alpha$ 是纯虚值,要使 $\alpha_1$ 为实值的充要条件是

$$\overline{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 e^{-\alpha}}=\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 e^{-\alpha}<0.$$

根据前一等号,有

$$\left(\frac{h_2\bar{h}_1}{h_1\bar{h}_2}e^{-\alpha}\right)^2=1,$$

因而

$$\frac{h_2\bar{h}_1}{h_1\bar{h}_2}e^{-\alpha}=\pm 1,$$

但

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 e^{-\alpha}=\frac{h_2\bar{h}_2}{h_1\bar{h}_1}\frac{h_2\bar{h}_1}{h_1\bar{h}_2}e^{-\alpha},$$

所以要求 $h_1$, $h_2$ 满足

$$\frac{h_2\bar{h}_1}{h_1\bar{h}_2}e^{-\alpha}=-1. \tag{4.217}$$

与定理 4.12 的推导相类似,可以证明,取 $\lambda_1$ 使 $|\lambda_1|=1$ 时,如(4.217)式在一点成立,则处处成立,从而得到如下定理:

**定理 4.13**　设 $\alpha$ 为纯虚值,如果取 $\lambda_1$ 使 $|\lambda_1|=1$, 又取 $h_1$, $h_2$,使满足(4.217)式,则相应的 Darboux 变换就是 sine-Laplace 方程的解到 sinh-Laplace 方程的解的 Darboux 变换.

反复进行这两种 Darboux 变换,就得到 Darboux 变换的序列

$$(\alpha,\ \Phi) \longrightarrow (\alpha_1,\ \Phi_1) \longrightarrow (\alpha_2,\ \Phi_2) \longrightarrow \cdots$$

如果第一个 $\alpha$ 为纯虚值, $\beta=-\mathrm{i}\alpha$ 是 sine-Laplace 方程的解,则 $\alpha_1$, $\alpha_3$, $\cdots$, $\alpha_{2n+1}$, $\cdots$是 sinh-Laplace 方程的解, $\beta_2=-\mathrm{i}\alpha_2$, $\beta_4=-\mathrm{i}\alpha_4$, $\cdots$, $\beta_{2n}=-\mathrm{i}\alpha_{2n}$, $\cdots$是 sine-Laplace 方程的解. 如果第一个 $\alpha$ 为 sinh-Laplace 方程的实解,则偶数次 Darboux 变换得到 sinh-Laplace 方程的解;奇数次 Darboux 变换得到 sine-Laplace 方程的解. 图示如下:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha_0 & & \tilde{\alpha}_1 & & \alpha_2 & & \tilde{\alpha}_3 & & \alpha_4 & & \cdots \\ & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & \\ \tilde{\alpha}_0 & & \alpha_1 & & \tilde{\alpha}_2 & & \alpha_3 & & \tilde{\alpha}_4 & & \cdots \end{array}$$

$\alpha_{\mathrm{i}}$ 和 $\tilde{\alpha}_{\mathrm{i}-1}$ 当 i 为奇数时为实值,当 i 为偶数时为纯虚值.

现在进一步证明 Bäcklund 变换(4.197)式和以上所描述的 Darboux 变换是一致的.

把(4.210)式改写为

$$\mathrm{e}^{(\alpha_1+\alpha)/2}=\frac{h_2}{h_1},$$

关于 $\zeta$ 微分,利用 $h_1$, $h_2$ 所满足的(4.212)式,得到

$$\frac{(\alpha_1+\alpha)_\zeta}{2}=\mathrm{i}\lambda_1\sinh\frac{\alpha-\alpha_1}{2}, \tag{4.218}$$

关于 $\bar{\zeta}$ 微分,利用(4.212)式,又有

$$\frac{(\alpha_1-\alpha)_{\bar{\zeta}}}{2}=\frac{\mathrm{i}}{\lambda_1}\sinh\frac{\alpha+\alpha_1}{2}. \tag{4.219}$$

令 $\theta=\alpha_1/2$, $\lambda_1=\dfrac{\mathrm{i}+\sinh\tau}{\cosh\tau}$, (4.197)式经过组合后,就得到(4.218)式和(4.219)式. 因此所得的 $\alpha_1$ 就是曲面的 Bäcklund 变换中所需的函数,从

而得到如下定理：

**定理 4.14** 利用 Darboux 变换(4.210)式和 Bäcklund 变换(4.194)式，可以显式地作出类型(d)的 Bäcklund 线汇及其类空和类时的焦曲面间的 Bäcklund 变换.

**例 4.1** 我们从平凡解 $\alpha=0$ 出发，此时 Lax 对为

$$\Phi_{\zeta}=\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Phi,\quad \Phi_{\bar{\zeta}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1/\lambda\\ -1/\lambda & 0\end{pmatrix}\Phi, \tag{4.220}$$

因而可取其基本解为

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix}e^{\gamma} & e^{-\gamma}\\ -ie^{\gamma} & ie^{-\gamma}\end{pmatrix},\quad \gamma=\left(\frac{\lambda}{2}\zeta-\frac{1}{2\lambda}\bar{\zeta}\right)i. \tag{4.221}$$

现在可以通过 Darboux 变换求 $\alpha_1$，这时由于 $\alpha=0$ 可以看成实值或纯虚值，故可通过不同的方法作 $\alpha_1$，使之成为纯虚值或实值. 先求实的 $\alpha_1$：

令 $\lambda=\lambda_1$，$|\lambda_1|=1$，

$$\gamma_1=\left(\frac{\lambda_1}{2}\zeta-\frac{1}{2\lambda_1}\bar{\zeta}\right)i \tag{4.222}$$

为实数. 可取 $\lambda=\lambda_1$ 时 Lax 对的列向量解为

$$h_1=e^{\gamma_1}+be^{-\gamma_1},\quad h_2=-ie^{\gamma_1}+bie^{-\gamma_1}. \tag{4.223}$$

取 $b$ 为实数，则

$$\frac{h_2\bar{h}_1}{h_1\bar{h}_2}=-1.$$

不妨取 $b$ 为正数并将其吸收到 $\gamma_1$ 中，使 $\gamma_1$ 添上一常数项，所以可取 $b=1$. 由(4.210)式得

$$e^{\alpha_1/2}=i\frac{h_2}{h_1}=\frac{e^{\gamma_1}-e^{-\gamma_1}}{e^{\gamma_1}+e^{-\gamma_1}}=\tanh\gamma_1\quad(\gamma_1>0),$$

同时

$$e^{\alpha_1/2}=\coth\gamma_1,$$

因而

$$\cosh\frac{\alpha_1}{2}=\coth(2\gamma_1),\quad \sinh\frac{\alpha_1}{2}=-\operatorname{cosech}(2\gamma_1). \tag{4.224}$$

在 $\gamma_1<0$ 时，(4.224)式右端要改变符号.

$\alpha = 0$ 并不对应于类时的曲面，但可以是一个正交标架系，由(4.124)式～(4.126)式

$$dr = du e_1, \ de_1 = 0, \ de_2 = dv n, \ dn = dv e_2 \tag{4.225}$$

可得

$$r = (u, 0, 0), \quad e_1 = (1, 0, 0),$$
$$e_2 = (0, \sinh v, \cosh v), \tag{4.226}$$
$$n = (0, \cosh v, \sinh v).$$

而依(4.194)式可得到参数表示的类空的负常曲率曲面

$$r^* = (u + l\coth(2\gamma_1), -l\operatorname{cosech}(2\gamma_1)\sinh v,$$
$$-l\operatorname{cosech}(2\gamma_1)\cosh v). \tag{4.227}$$

根据一般理论，上面作出的 $\alpha_1 = -2\tanh^{-1}(\operatorname{sech}(2\gamma_1))$ 是 sinh-Laplace 方程的一个解，它在 $(u, v)$ 参数平面上除去 $\gamma_1 = 0$ 这条直线外有意义，$\gamma_1 \to 0$ 时，曲面上的点趋于无限远.

再作一次 Darboux 变换. 先写出

$$\Phi_1(\lambda) = D(\lambda)\Phi(\lambda)$$
$$= \left(I - \frac{\lambda}{\lambda_1}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{h_1}{h_2} \\ \dfrac{h_2}{h_1} & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} e^{\gamma} & e^{-\gamma} \\ -ie^{\gamma} & ie^{-\gamma} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\coth\gamma_1\right)e^{\gamma} & \left(1 + \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\coth\gamma_1\right)e^{-\gamma} \\ -i\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\tanh\gamma_1\right)e^{\gamma} & i\left(1 + \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\tanh\gamma_1\right)e^{-\gamma} \end{pmatrix}. \tag{4.228}$$

取 $\lambda_2$ 使 $|\lambda_2| = 1$，记 $\lambda_2/\lambda_1 = e^{i\mu}$ ($\mu$ 实数)，

$$h_1' = (1 - e^{i\mu}\coth\gamma_1)e^{\gamma_2} + b(1 + e^{i\mu}\coth\gamma_1)e^{-\gamma_2},$$
$$h_2' = i(-1 + e^{i\mu}\tanh\gamma_1)e^{\gamma_2} + ib(1 + e^{i\mu}\tanh\gamma_1)e^{-\gamma_2}, \tag{4.229}$$

这里

$$\gamma_2 = \left(\frac{\lambda_2}{2}\zeta - \frac{1}{2\lambda_2}\bar{\zeta}\right)\mathrm{i} \tag{4.230}$$

是一实数. 现在要得出的解 $\alpha_2$ 应是纯虚的 ($\beta = -\mathrm{i}\alpha_2$ 应该满足 sine-Laplace 方程),所以要求(4.211)式成立,容易验证,$b$ 取实数即可做到. 事实上,这时

$$\bar{h}_1' = -\mathrm{i}h_2'\coth\gamma_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu}, \tag{4.231}$$

$$\left|\frac{h_2'}{h_1'}\right|^2\mathrm{e}^{-\alpha_1} = \frac{1}{\coth^2\gamma_1}\coth^2\gamma_1 = 1.$$

在(4.210)式中,将 $\alpha$ 改写为 $\alpha_1$, $\frac{h_2}{h_1}$ 改为 $\frac{h'_2}{h'_1}$, 就得出 $\alpha_2 = \mathrm{i}\beta$, $\beta$ 是 sine-Laplace 方程的解,从而可以得到 $\cos\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$ 的显式表达式,并且可以由此作 Bäcklund 变换而得到类时的负常曲率曲面.

现在希望由 $\alpha = 0$ 得到纯虚的 $\alpha_1$. 从 $\alpha = 0$ 的 Lax 对基本解(4.221)式选取列向量 $\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$, 使

$$\left|\frac{h_2}{h_1}\right|^2 = 1, \tag{4.232}$$

即

$$\frac{\mathrm{e}^{2\gamma_1} + |b|^2\mathrm{e}^{-2\gamma_1} - (b+\bar{b})}{\mathrm{e}^{2\gamma_1} + |b|^2\mathrm{e}^{-2\gamma_1} + (b+\bar{b})} = 1, \tag{4.233}$$

因而 $b$ 必须为纯虚数. 因为 $|b|$ 可以吸收到 $\mathrm{e}^{\gamma_1}$ 中,故可以取 $b = \pm\mathrm{i}$, 现取 $b = \mathrm{i}$,

$$h_1 = \mathrm{e}^{\gamma_1} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\gamma_1}, \quad h_2 = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\gamma_1} - \mathrm{e}^{-\gamma_1}, \tag{4.234}$$

由此得

$$\mathrm{e}^{\alpha_1/2} = \mathrm{i}\frac{h_2}{h_1} = \tanh(2\gamma_1) - \mathrm{i}\,\mathrm{sech}(2\gamma_1),$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha_1/2} = -\mathrm{i}\frac{h_1}{h_2} = \tanh(2\gamma_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{sech}(2\gamma_1).$$

令 $\alpha_1 = \mathrm{i}\beta_1$, 有下式成立:

$$\cos\frac{\beta_1}{2} = \tanh(2\gamma_1), \quad \sin\frac{\beta_1}{2} = -\mathrm{sech}(2\gamma_1), \tag{4.235}$$

$$\frac{\beta_1}{2} = \cos^{-1}(\tanh(2\gamma_1)),$$

**表 4.1　$\mathbf{R}^3$ 和 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中的伪球线汇**

| 空　间 | 曲　　面 | 线汇与 Bäcklund 变换 | Darboux 变换 | 方　　程 |
|---|---|---|---|---|
| 1. $\mathbf{R}^3$ | $\boldsymbol{r}$<br>$\boldsymbol{r}^*$<br>$K=-1$<br>$I=\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2+\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>$II=\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)$ | $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1+\sin\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$<br>$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=1,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$ | $\alpha$<br>$\downarrow\uparrow$<br>$\alpha_1$ | $\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=\sin\alpha$<br>$\alpha_{1uu}-\alpha_{1vv}=\sin\alpha_1$ |
| 2. $\mathbf{R}^{2,1}$ | $\boldsymbol{r}$<br>$\boldsymbol{r}^*$<br>$K=1$，类空曲面<br>$I=\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2+\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>$II=-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)$ | $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1+\sin\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$<br>类空线汇<br>$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=1,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$ | $\alpha$<br>$\downarrow\uparrow$<br>$\alpha_1$ | $\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=-\sin\alpha$<br>$\alpha_{1uu}-\alpha_{1vv}=-\sin\alpha_1$ |
| 3. $\mathbf{R}^{2,1}$ | $\boldsymbol{r}$<br>$\boldsymbol{r}^*$<br>$K=1$，类时曲面<br>实主曲率 $k_1\neq k_2$<br>$I=\cosh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2-\sinh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>或 $\sinh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2-\cosh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>$II=\cosh\frac{\alpha}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)$ | $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l\left(\sinh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1+\cosh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$<br>类时线汇<br>$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l\left(\cosh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1+\sinh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$<br>类空线汇<br>$\boldsymbol{e}_1^2=-\boldsymbol{e}_2^2=1,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$ | $\alpha$<br>$\downarrow\uparrow$<br>$\alpha_1$ | $\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=\sinh\alpha$<br>$\alpha_{1uu}-\alpha_{1vv}=\sinh\alpha_1$ |

（续表）

| 空　间 | 曲　　面 | 线汇与 Bäcklund 变换 | Darboux 变换 | 方　　程 |
|---|---|---|---|---|
| 4. $\mathbf{R}^{2,1}$ | $\boldsymbol{r}$<br>$\boldsymbol{r}^*$<br>$K=1$，类时曲面<br>$k_1=k_2$<br>$I=-\mathrm{e}^{\omega}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$<br>$II=-\mathrm{e}^{\omega}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ | $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2)$<br>$ab\mathrm{e}^{\omega}=1$<br>类空线汇<br>$ab\mathrm{e}^{\omega}=-1$<br>类时线汇<br>$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=0$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{\mathrm{e}^{\omega}}{2}$ | $\omega \downarrow\uparrow \omega_1$ | $\omega_{uv}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\omega}$<br>$\omega_{1uv}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\omega_1}$ |
| 5. $\mathbf{R}^{2,1}$ | $\boldsymbol{r}$<br>$\boldsymbol{r}^*$<br>$K=1$，类时曲面<br>$k_1$，$k_2$ 纯虚<br>$I=-\mathrm{d}u^2-2\sinh\omega\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2$<br>$II=-2\cosh\omega\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ | $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2)$<br>$ab\mathrm{e}^{\omega}=1$<br>类空线汇<br>$ab\mathrm{e}^{\omega}=-1$<br>类时线汇<br>$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=0$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{\mathrm{e}^{\omega}}{2}$ | $\omega \downarrow\uparrow \omega_1$ | $\omega_{uv}=\cosh\omega$<br>$\omega_{1uv}=\cosh\omega_1$ |
| 6. $\mathbf{R}^{2,1}$ | $\boldsymbol{r}$<br>$K=-1$，类时曲面<br>$I=\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u^2-\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>$II=\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)$<br>$\boldsymbol{r}^*$<br>$K=-1$，类空曲面<br>$I=\cosh^2\frac{\alpha_1}{2}\mathrm{d}u^2+\sinh^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v^2$<br>$II=\cosh\frac{\alpha_1}{2}\sinh\frac{\alpha_1}{2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$ | $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+l\left(\cosh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_1+\sinh\frac{\alpha_1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$<br>$\boldsymbol{e}_1^2=-\boldsymbol{e}_2^2=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$<br>$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^*+l\left(\cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{e}_1^*+\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{e}_2^*\right)$<br>类空线汇<br>$\boldsymbol{e}_1^{*2}=\boldsymbol{e}_2^{*2}=1$，$\boldsymbol{e}_1^*\cdot\boldsymbol{e}_2^*=0$ | $\alpha \downarrow\uparrow \alpha_1$ | $\Delta\alpha=\sin\alpha$<br>$\Delta\alpha_1=\sinh\alpha_1$ |

$\beta_1$ 就是 sine-Laplace 方程的解. 这时 Darboux 阵为

$$D(\lambda) = I - \frac{\lambda}{\lambda_1}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}e^{-\alpha_1/2} \\ -\mathrm{i}e^{-\alpha_1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.236}$$

而基本解

$$\Phi_1(\lambda) = D(\lambda)\Phi(\lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\gamma}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}e^{-\alpha_1/2}\right) & e^{-\gamma}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}e^{-\alpha_1/2}\right) \\ -\mathrm{i}\,e^{\gamma}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}e^{\alpha_1/2}\right) & \mathrm{i}\,e^{-\gamma}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}e^{\alpha_1/2}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.237}$$

取 $\lambda_2$ 使 $|\lambda_2| = 1$, 置 $\lambda_2/\lambda_1 = e^{\mathrm{i}\mu}$, $\mu =$ 实数, $\gamma_2$ 的意义如前, 取

$$\begin{aligned} h_1' &= e^{\gamma_2}(1 - e^{\mathrm{i}\mu}e^{-\alpha_1/2}) + be^{-\gamma_2}(1 + e^{\mathrm{i}\mu}e^{-\alpha_1/2}), \\ h_2' &= -\mathrm{i}\,e^{\gamma_2}(1 - e^{\mathrm{i}\mu}e^{\alpha_1/2}) + \mathrm{i}b\,e^{-\gamma_2}(1 + e^{\mathrm{i}\mu}e^{\alpha_1/2}). \end{aligned} \tag{4.238}$$

取 $b$ 为纯虚数, 则有下式成立:

$$\overline{h}_1' = -h_1' e^{-\mathrm{i}\mu}e^{\alpha_1/2}, \quad \overline{h}_2' = h_2' e^{-\mathrm{i}\mu}e^{-\alpha_1/2}, \tag{4.239}$$

因而

$$\frac{h_2'\overline{h}_1'}{h_1'\overline{h}_2'}e^{-\alpha_1} = -1,$$

所以

$$e^{\alpha_2/2} = \mathrm{i}\frac{h_2'}{h_1'}e^{-\alpha_1/2}, \quad e^{-\alpha_2/2} = \mathrm{i}\frac{h_1'}{h_2'}e^{\alpha_1/2} \tag{4.240}$$

是正的实函数, 由此定出的 $\alpha_2$ 满足 sinh-Laplace 方程. 利用 $\alpha_1$ 和 $\alpha$ 可以用与上一段类似的方法作出相应的 Bäcklund 线汇及类空的负常曲率曲面和类时的负常曲率曲面.

Bäcklund 线汇和有关的各种常曲率曲面列于表 4.1 中.

## §4.4　正交标架和 Lax 对

现在考虑 $\mathbf{R}^3$ 中负常曲率曲面的正交标架和 sine-Gordon 方程的 Lax 对的关系.

群 $SU(2)$ 是形为

$$\mathscr{A}=\begin{pmatrix} a_0+a_1\mathrm{i} & a_2+a_3\mathrm{i} \\ -a_2+a_3\mathrm{i} & a_0-a_1\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{4.241}$$

($a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ 为实数, $a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$) 的 $2\times 2$ 阵所组成, $\mathscr{A}$ 又满足 $\mathscr{A}^*\mathscr{A}=I$ 及 $\det\mathscr{A}=1$. Lie 代数 $su(2)$是由形为

$$A=\begin{pmatrix} \beta\mathrm{i} & \gamma+\delta\mathrm{i} \\ -\gamma+\delta\mathrm{i} & -\beta\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad (\beta,\ \gamma,\ \delta\ \text{是实数}) \tag{4.242}$$

的 $2\times 2$ 阵组成的线性空间,其中 $A$ 满足 $A^*+A=0$, $\mathrm{tr}A=0$.

群 $SO(3)$由行列式为 1 的三阶正交阵所组成,其 Lie 代数$so(3)$由三阶反称阵所构成. 对应

$$\sigma:\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \beta\mathrm{i} & \gamma+\delta\mathrm{i} \\ -\gamma+\delta\mathrm{i} & -\beta\mathrm{i} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \beta & \delta \\ -\beta & 0 & \gamma \\ -\delta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \tag{4.243}$$

是 $su(2)$和 $so(3)$的一个同构,其意义是

$$[\sigma A,\ \sigma B]=\sigma[A,\ B]. \tag{4.244}$$

$so(3)$和 $su(2)$的同构是早已熟知的,同构的表达式不是唯一的,因为它可以由 $so(3)$(或 $su(2)$)的自同构而改变,我们选取的(4.243)式是为了后文的方便. 这个 Lie 代数的同构可以提升为李群$SO(3)$到 $SU(2)$的双值映照 $\tau^{-1}$(见引理 4.1、4.2).

根据(4.33)式,负常曲率曲面的正交标架所满足的微分方程为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha_v}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ -\dfrac{\alpha_v}{2} & 0 & 0 \\ -\sin\dfrac{\alpha}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha_u}{2} & 0 \\ -\dfrac{\alpha_u}{2} & 0 & -\cos\dfrac{\alpha}{2} \\ 0 & \cos\dfrac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix}. \tag{4.245}$$

利用同构 $\sigma$,得到 $2\times 2$ 阵的一个方程组

$$\Psi_u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\alpha_v}{2}\mathrm{i} & \mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\\ \mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha_v}{2}\mathrm{i}\end{pmatrix}\Psi,$$
$$\Psi_v=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\alpha_u}{2}\mathrm{i} & -\cos\frac{\alpha}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha_u}{2}\mathrm{i}\end{pmatrix}\Psi, \tag{4.246}$$

这里 $\Psi$ 是 $2\times 2$ 阵,它和正交标架的具体关系将在后文中再说明. 现在引入

$$\xi=\frac{u+v}{2},\quad \eta=\frac{u-v}{2}, \tag{4.247}$$

如前,有

$$\Psi_\xi=\Psi_u+\Psi_v=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\alpha_\xi}{2}\mathrm{i} & -\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}/2}\\ \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}/2} & -\frac{\alpha_\xi}{2}\mathrm{i}\end{pmatrix}\Psi,$$
$$\Psi_\eta=\Psi_u-\Psi_v=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{\alpha_\eta}{2}\mathrm{i} & \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}/2}\\ -\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}/2} & \frac{\alpha_\eta}{2}\mathrm{i}\end{pmatrix}\Psi. \tag{4.248}$$

令

$$\Phi=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}/4} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}/4}\end{pmatrix}\Psi, \tag{4.249}$$

则

$$\Phi_\xi=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}}\\ \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}} & 0\end{pmatrix}\Phi,$$
$$\Phi_\eta=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\alpha_\eta\mathrm{i} & 1\\ -1 & \alpha_\eta\mathrm{i}\end{pmatrix}\Phi. \tag{4.250}$$

令 $\xi=\lambda\xi_1$, $\eta=\frac{1}{\lambda}\eta_1$, 仍把 $\xi_1$, $\eta_1$ 记为 $\xi$, $\eta$,则就有 Lax 对

$$\Phi_\xi=\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}}\\ \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}} & 0\end{pmatrix}\Phi,$$
$$\Phi_\eta=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\alpha_\eta\mathrm{i} & 1/\lambda\\ -1/\lambda & \alpha_\eta\mathrm{i}\end{pmatrix}\Phi, \tag{4.251}$$

这样,就得到 sine-Gordon 方程的另一种形式的 Lax 对.

**注 4.4** 要注意,当作变换 $\xi\to\lambda\xi,\ \eta\to\dfrac{\eta}{\lambda}$ 时,Lax 对(4.251)式的导出只是"形式上"的. $\Phi\left(\lambda\xi,\ \dfrac{\eta}{\lambda}\right)$ $(\lambda\neq 1)$ 并不是 $\alpha(\xi,\ \eta)$ 所对应的 Lax 对(4.251)式的解,只有在(4.251)式右端的 $\alpha(\xi,\ \eta)$ 改为 $\alpha\left(\lambda\xi,\ \dfrac{\eta}{\lambda}\right)$ 后,$\Phi\left(\lambda\xi,\ \dfrac{\eta}{\lambda}\right)$ 才能满足它. 但 $\alpha\left(\lambda\xi,\ \dfrac{\eta}{\lambda}\right)$ 也是 sine-Gordon 方程的解.

**注 4.5** 如果用 $su(2)$ 的同构

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

又把 $\lambda$ 改为 $\dfrac{i}{2\lambda}$, Lax 对(4.67)式就化为(4.251)式.

Darboux 变换的作法完全和 §4.3 相仿,此时 Lax 对的形式也相同,只是 $\zeta,\ \bar{\zeta}$ 要换为 $\xi,\ \eta$. 为保证实的 $\alpha$(纯虚的 $i\alpha$),在此取 $\lambda$ 为纯虚的及 $\left|\dfrac{h_2}{h_1}\right|=1$ 就能达到目的,这里就不详细叙述了.

为了寻出正交标架和 Lax 对的基本解的关系,还需要有与 Lie 代数 $su(2)$ 到 $so(3)$ 同构(4.243)式相对应的群 $SU(2)$ 到 $SO(3)$ 的映照.

**引理 4.2** 设 $\mathscr{A}\in SU(2)$ 由(4.241)式所定义,

$$\tau(\mathscr{A})=\begin{pmatrix} a_0^2+a_2^2-a_3^2-a_1^2 & 2(a_0a_1-a_2a_3) & 2(a_0a_3+a_1a_2) \\ -2(a_0a_1+a_2a_3) & a_0^2+a_3^2-a_2^2-a_1^2 & 2(a_0a_2-a_1a_3) \\ 2(-a_0a_3+a_1a_2) & 2(-a_0a_2-a_3a_1) & a_0^2-a_3^2-a_2^2+a_1^2 \end{pmatrix} \tag{4.252}$$

为 $SU(2)$ 中一般元素(4.241)式到 $SO(3)$ 的一个映照,这是一个覆盖同态,是一个二对一的映照. 并且若 $\Psi$ 满足(4.248)式,则 $\tau(\Psi)$ 满足(4.245)式.

**证明** 要证明的事项有:

(i) $\tau(\mathscr{A}) \in SO(3)$ 是满的映照;

(ii) 同态性质,即 $\tau(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \tau(\mathscr{A})\tau(\mathscr{B})$;

(iii) $\tau(\mathscr{A}) = \tau(\mathscr{B})$ 的充要条件是 $\mathscr{B} = \pm \mathscr{A}$;

(iv) $\tau: SU(2) \to SO(3)$ 诱导出 Lie 代数间的同构,从此就成立;若 $\mathscr{A}$ 是一些参数的函数,则 $(\mathrm{d}\tau(\mathscr{A}))(\tau(\mathscr{A}))^{-1} = \sigma((\mathrm{d}\mathscr{A})\mathscr{A}^{-1})$.

这些事项是 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 的基本关系,在 Lie 群中是熟知的简单事项,不过在这里比较具体化了,它们都可以用计算来证实,这种计算都是很直接的,在此从略. ∎

此外,还有如下引理成立:

**引理 4.3** 设 $(a_{ij}) \in SO(3)$,那么由下式定出的 $a_0, a_1, a_2, a_3$ 和阵(4.241)式满足 $\tau(\mathscr{A}) = (a_{ij})$:

$$
\begin{aligned}
a_0^2 &= \frac{1}{4}(1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}), \\
a_1^2 &= \frac{1}{4}(1 + a_{33} - a_{11} - a_{22}), \\
a_2^2 &= \frac{1}{4}(1 + a_{11} - a_{22} - a_{33}), \\
a_3^2 &= \frac{1}{4}(1 + a_{22} - a_{11} - a_{33}), \\
a_0 a_1 &= \frac{1}{4}(a_{12} - a_{21}), \quad a_0 a_2 = \frac{1}{4}(a_{23} - a_{32}), \\
a_0 a_3 &= \frac{1}{4}(a_{13} - a_{31}).
\end{aligned}
\tag{4.253}
$$

$a_i$ 中任何一个(如 $a_0$)符号取定后,其余 $a_i$ 的符号也就确定了. 在不会引起混淆时,我们用 $\tau^{-1}(A)$ 记这个双值映照的某一支.

现在可以讨论 Lax 对的解和负常曲率曲面 Chebyshev 标架的关系.

先考察 $\lambda = 1$ 的情形:设负常曲率曲面的 Chebyshev 坐标表示为已知,将 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}$ 排成一列,得出一个 $SO(3)$ 中的阵. 置

$$
\Phi(1, \xi, \eta) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\alpha i/4} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha i/4} \end{pmatrix} \tau^{-1}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix}\right). \tag{4.254}
$$

根据上面的叙述就可知 $\Phi(1, \xi, \eta)$ 满足 Lax 对(4.250)式,但此时 $\lambda = 1$.

相反地,如 $\Phi(1,\xi,\eta)$为 Lax 对在 $\lambda=1$ 时的解,且取值于 $SU(2)$(只要在某一点满足此条件,就处处满足此条件),则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix} = \tau\left(\begin{pmatrix} e^{-\alpha i/4} & 0 \\ 0 & e^{\alpha i/4} \end{pmatrix}\Phi(1)\right) \tag{4.255}$$

给出了正交标架,再积分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}u\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}v\boldsymbol{e}_2, \tag{4.256}$$

就得到了负常曲率曲面的 Chebyshev 坐标下的表示. 注意到(4.256)式的可积条件满足,从(4.256)式作出 $\boldsymbol{r}$ 只需作单纯的积分而不是解线性微分方程.

这样就得到负常曲率曲面的 Chebyshev 标架和 Lax 对的解 $\Phi(1)$的相互对应关系,二者可利用(4.254)式和(4.255)式相互确定.

再看 $\Phi(\lambda,\xi,\eta)$的几何意义:令 $\xi_1=\lambda\xi$, $\eta_1=\dfrac{\eta}{\lambda}$, 则 $\Phi\left(\lambda,\dfrac{\xi_1}{\lambda},\lambda\eta_1\right)$ 满足

$$\Phi_{\xi_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -e^{-\alpha_\lambda i} \\ e^{\alpha_\lambda i} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \quad \Phi_{\eta_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha_{\lambda\eta_1} & 1 \\ -1 & \alpha_{\lambda\eta_1} i \end{pmatrix}\Phi,$$

式中 $\alpha_\lambda(\xi_1,\eta_1)=\alpha\left(\lambda\xi_1,\dfrac{\eta_1}{\lambda}\right)$. 我们重记 $\xi_1$, $\eta_1$ 为 $\xi$, $\eta$,记 $\Phi\left(\lambda,\dfrac{\xi}{\lambda},\lambda\eta\right)=\Phi_\lambda(1,\xi,\eta)$, 它满足(4.250)式,但其中的 $\alpha$ 应该为 $\alpha\left(\dfrac{\xi}{\lambda},\lambda\eta\right)=\alpha_\lambda(\xi,\eta)$. 注意到 $\alpha_\lambda$ 仍为 sine-Gordon 方程的解,它也对应于负常曲率曲面 $S_\lambda$,这是和 $\lambda$ 有关的一系负常曲率曲面. $S$ 到 $S_\lambda$ 的变换称为 Lie 变换[17], 是 S. Lie 研究过的. 有如下定理:

**定理 4.15** 对于实数 $\lambda(\lambda\neq 0)$,Lax 对(4.251)式的解 $\Phi(\lambda)$和负常曲率曲面 $S_\lambda$ 的 Chebyshev 标架可以按对应 $\tau$ 互相确定.

因而在解出 Lax 对以后,不仅使 Darboux 变换可进行,而且也给出原来曲面的 Lie 变换的 Chebyshev 标架,这使求 Lie 变换化为单纯的积分. 然后可继续作曲面的 Bäcklund 变换和 Darboux 变换,就能用纯代数算法得出一系列负常曲率曲面及其 Lie 变换族.

据此,我们可把 4.2.4 节中关于 $\mathbf{R}^3$ 中负常曲率曲面的图解再增补如下:

$\alpha \longrightarrow$ Lax 对的解 $\Phi \longrightarrow$ 常曲率曲面及其 Lie 变换 $\Longrightarrow$ $\alpha_1$, Lax 对的解,常曲率曲面及其 Lie 变换 $\Longrightarrow \cdots$

图中第一、二个"$\longrightarrow$"是由求解线性偏微分方程完成的,"$\Longrightarrow$"是由纯代数的算法完成的.

对于 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中的各种常曲率曲面,可以用同样的方法建立起 Chebyshev 标架和 Lax 对的解的关系,即建立起 Lax 对和曲面的 Lie 变换所得的曲面族的关系. 但需注意的是,这时应有 Lie 代数(以及群) $su(1, 1)$ 同 $so(2, 1)$ 之间的同构,而 Lie 代数 $su(1, 1)$ 是由

$$A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}A^* = 0$$

定义的 $2\times 2$ 阵所构成,而 $so(2, 1)$ 是 $\mathbf{R}^{2,1}$ 上行列式为 1 的 Lorentz 变换群的 Lie 代数,其中元素形式为 $\begin{pmatrix}0 & \beta & \delta\\ -\beta & 0 & \gamma\\ \delta & \gamma & 0\end{pmatrix}$.

# § 4.5　常平均曲率曲面

近年来, 常平均曲率曲面十分引人注意, 它在理论上和应用上均有一定的重要性. 在理论上, 近年来构作了浸入于欧氏空间的(和环面同胚的)常平均曲率曲面, 使 Hopf 的一个猜想有了明确的结论[79], 在这里要说明, 用 Darboux 变换的方法可以从已知的常平均曲率曲面用代数的算法构作无限系列的常平均曲率曲面.

## 4.5.1　欧氏空间的平行曲面

欧氏空间曲面 $S$ 的每一点沿法线方向移动同一距离 $l$,就得出另一曲面,这就是 $S$ 的平行曲面. 现取以曲率线的单位切线方向为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 的正交标架,$S$ 的基本方程为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \omega^a \boldsymbol{e}_a \quad (a = 1,\ 2),$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_a = \omega_a^b \boldsymbol{e}_b + \omega_a^3 \boldsymbol{n}, \tag{4.257}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \omega_3^a \boldsymbol{e}_a.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 为曲率线单位切向量,所以

$$\omega_1^3 = b_{11}\omega^1, \quad \omega_2^3 = b_{22}\omega^2, \tag{4.258}$$

$b_{11}$, $b_{22}$是曲率线的主曲率.

平行曲面 $S(l)$是 $S$ 上各点沿法线方向移动距离 $l$ 而得到的曲面,其方程为

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l\boldsymbol{n}, \tag{4.259}$$

微分得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = \omega^{*a}\boldsymbol{e}_a, \tag{4.260}$$

式中

$$\omega^{*a} = \omega^a + l\omega_3^a = (1 - lb_{aa})\omega^a. \tag{4.261}$$

从此可见,$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 仍然为 $S(l)$的切向量,$\boldsymbol{n}$ 为法向量,在 $1 - lb_{11} \neq 0$, $1 - lb_{22} \neq 0$ 时,曲面 $S(l)$为正则的,$\{\boldsymbol{r}^*, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}\}$是 $S(l)$的单位正交标架,并有

$$\omega_2^{*1} = \omega_2^1, \quad \omega_1^{*3} = \omega_1^3 = b_{11}\omega^1, \quad \omega_2^{*3} = \omega_2^3 = b_{22}\omega^2. \tag{4.262}$$

另一方面,将 $\omega_1^{*3}$ 和 $\omega_2^{*3}$ 表示为 $\omega^{*1}$, $\omega^{*2}$ 的线性组合:

$$\omega_1^{*3} = b_{11}^*\omega^{*1} + b_{12}^*\omega^{*2} = b_{11}^*\omega^1 - lb_{11}^*\omega_1^3 + b_{12}^*\omega^{*2},$$

$$\omega_2^{*3} = b_{22}^*\omega^2 - lb_{22}^*\omega_2^3 + b_{21}^*\omega^{*1}, \tag{4.263}$$

所以

$$b_{11}^* - lb_{11}^*b_{11} = b_{11}, \quad b_{22}^* - lb_{22}^*b_{22} = b_{22}, \quad b_{12}^* = b_{21}^* = 0, \tag{4.264}$$

从而

$$b_{11}^* = \frac{b_{11}}{1 - lb_{11}}, \quad b_{22}^* = \frac{b_{22}}{1 - lb_{22}}, \tag{4.265}$$

这就是说,$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 仍然是 $S(l)$的曲率线单位切向量,其主曲率为 $b_{11}^*$, $b_{22}^*$. 因而平行曲面 $S(l)$的 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$K^* = \frac{b_{11}b_{22}}{(1 - lb_{11})(1 - lb_{22})} = \frac{K}{1 - 2lH + l^2K}, \tag{4.266}$$

$$H^* = \frac{H - lK}{1 - 2lH + l^2K}, \tag{4.267}$$

式中 $H=\frac{1}{2}(b_{11}+b_{22})$ 为曲面 $S$ 的平均曲率. 最平凡的常平均曲率曲面是球面和圆柱面. 我们不必讨论这些情形.

现设 $K=$常数,若 $H^*$ 也是常数,由(4.267)式就推出

$$H(-2lH^*-1)=-lK-H^*(1+l^2K). \tag{4.268}$$

上式右端是常数,而 $H$ 不是常数(因为 $S$ 非球面,也非圆柱面,$K$ 已为常数,$H$ 不再为常数),所以有

$$H^*=-\frac{1}{2l},\quad 1-l^2K=0. \tag{4.269}$$

从此可见,$K>0$, $l=\pm\sqrt{\frac{1}{K}}$. 相反地,如果曲面 $S$ 的平均曲率$H$ 是常数,则由(4.266)式得

$$K(1-l^2K^*)=K^*(1-2lH). \tag{4.270}$$

设 $K^*$ 为常数,则(4.270)式右端是常数,但 $K$ 不是常数,所以取 $l=\frac{1}{2H}$, $K^*=\frac{1}{l^2}$ 成立. 由此得到以下熟知的定理:

**定理 4.16**　非球面的正常曲率曲面 $\left(K=\frac{1}{l^2}\right)$ 的两侧,各有一张距离为 $l$ 的常平均曲率 $\left(H^*=\pm\frac{1}{2l}\right)$ 的平行曲面,非球面非圆柱面的常平均曲率曲面 $\left(H=\frac{1}{2l}\right)$ 有一张距离为 $l$ 的平行曲面,为正常曲率曲面 $\left(K=\frac{1}{l^2}\right)$.

从此得知,欧氏空间中常平均曲率曲面的构作和正常曲率曲面的构作是同一个问题.

### 4.5.2　曲面的构作

这一小节讨论欧氏空间中常平均曲率曲面的构作. 为此,我们考虑非球面的正常曲率曲面的构作问题,这时并没有 Bäcklund 线汇可供利用,但是仍然可以用 Darboux 变换.

前已指出,取正常曲率曲面的 Chebyshev 坐标,(4.38)式成立,因而

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_v}{2} & \sinh\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha_v}{2} & 0 & 0 \\ -\sinh\frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_u}{2} & 0 \\ -\frac{\alpha_u}{2} & 0 & \cosh\frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\cosh\frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix}, \tag{4.271}$$

其可积条件为

$$\Delta\alpha = -\sinh\alpha.$$

再利用 Lie 代数 $so(3)$和 $su(2)$的同构(4.243)式,可以得到一个方程组

$$\begin{cases} \Psi_u = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{i\alpha_v}{2} & i\sinh\frac{\alpha}{2} \\ i\sinh\frac{\alpha}{2} & \frac{i\alpha_v}{2} \end{pmatrix}\Psi, \\ \Psi_v = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i\frac{\alpha_u}{2} & \cosh\frac{\alpha}{2} \\ -\cosh\frac{\alpha}{2} & -\frac{i\alpha_u}{2} \end{pmatrix}\Psi. \end{cases} \tag{4.272}$$

又令

$$\zeta = \frac{u+iv}{2}, \qquad \bar{\zeta} = \frac{u-iv}{2}, \tag{4.273}$$

可得

$$\Psi_\zeta = \Psi_u - i\Psi_v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\alpha_\zeta}{2} & -ie^{-\alpha/2} \\ ie^{\alpha/2} & -\frac{\alpha_\zeta}{2} \end{pmatrix}\Psi,$$

$$\Psi_{\bar{\zeta}} = \Psi_u + i\Psi_v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{-\alpha_{\bar{\zeta}}}{2} & ie^{\alpha/2} \\ -ie^{-\alpha/2} & \frac{\alpha_{\bar{\zeta}}}{2} \end{pmatrix}\Psi. \tag{4.274}$$

令

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{-\alpha/4} & 0 \\ 0 & e^{\alpha/4} \end{pmatrix} \Psi, \tag{4.275}$$

就有

$$\begin{aligned} \Phi_\zeta &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-\alpha} \\ ie^{\alpha} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\ \Phi_{\bar\zeta} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha_{\bar\zeta} & i \\ -i & \alpha_{\bar\zeta} \end{pmatrix}\Phi \end{aligned} \tag{4.276}$$

成立. 选常数 $\lambda$, 使 $|\lambda| = 1$, 则 $1/\lambda = \bar\lambda$. 置 $\zeta$ 为 $\dfrac{\zeta}{\lambda}$, $\bar\zeta$ 为 $\lambda\bar\zeta$, 则得到带谱参数的 Lax 对

$$\begin{aligned} \Phi_\zeta &= \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-\alpha} \\ ie^{\alpha} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\ \Phi_{\bar\zeta} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha_{\bar\zeta} & i/\lambda \\ -i/\lambda & \alpha_{\bar\zeta} \end{pmatrix}\Phi. \end{aligned} \tag{4.277}$$

其可积条件仍为负 sinh-Laplace 方程(4.39)式. 这里也有一个值得注意的事项, 即由以上步骤推出来的 $\Phi\left(\dfrac{\zeta}{\lambda}, \lambda\bar\zeta\right)$ 固然满足(4.277)式, 但其中的 $\alpha = \alpha\left(\dfrac{\zeta}{\lambda}, \lambda\bar\zeta\right)$ 是和 $\lambda$ 有关的. 同 § 4.4 中一样, 要求得到一个确定的 $\alpha(\zeta, \bar\zeta)$ 相应的 $\Phi(\lambda)$, 就等价于求解出曲面 $S$ 及其 Lie 变换所得到的正常曲率曲面族 $S_\lambda$.

正常曲率曲面可以由下面的方法进行显式的构作. 先注意, 对任何复数 $\alpha$(包括实数和纯虚数), 有

$$\sinh(\pi i + \alpha) = -\sinh\alpha$$

成立. 在 sinh-Laplace 方程的 Lax 对(4.208)式中, 令 $\lambda$ 为 $-i\lambda$, $\alpha$ 为 $\pi i + \alpha$, 就会得到负 sinh-Laplace 方程的 Lax 对. 相反地, 我们也可以实现负 sinh-Laplace 方程的解(及其 Lax 对的基本解)到 sinh-Laplace 方程的解(及其 Lax 对的基本解)的转化. 这样就可以利用 sinh-Laplace 方程的 Darboux 变换来实现负 sinh-Laplace 方程新解的构作. 设已知 $\alpha$ 为负 sinh-Laplace 方程的解, $\Phi$ 为 Lax 对的基本解, 算法如下:

$$
\begin{array}{ccc}
(\alpha,\ \Phi(\lambda)) & & (\alpha_2,\ \Phi_2(\lambda)) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \alpha = \mathrm{i}\pi + \alpha',\ \lambda = \mathrm{i}\lambda'} & & \Big\uparrow {\scriptstyle \lambda' = -\mathrm{i}\pi,\ \alpha' = \alpha - \mathrm{i}\pi} \\
(\alpha',\ \Phi'(\lambda')) & \xrightarrow{\text{两次 Darboux 变换}} & (\alpha_2',\ \Phi_2'(\lambda'))
\end{array}
\tag{4.278}
$$

式中$(\alpha',\ \Phi'(\lambda'))$和$(\alpha_2',\ \Phi_2'(\lambda'))$是 sinh-Laplace 方程的解及其 Lax 对的基本解,$(\alpha,\ \Phi(\lambda))$和$(\alpha_2,\ \Phi_2(\lambda))$是负 sinh-Laplace 方程的解及其 Lax 对的基本解,两次 Darboux 变换表示

$$
(\alpha',\ \Phi'(\lambda')) \longrightarrow (\alpha_1',\ \Phi_1'(\lambda')) \longrightarrow (\alpha_2',\ \Phi_2'(\lambda')), \tag{4.279}
$$

其中 $\alpha_1'$为纯虚的,$\alpha_2'$为实的. 这种过程已在§4.3 中详细叙述过了.

在得到$(\alpha_2,\ \Phi_2(\lambda))$之后,再依由(4.271)式化到(4.277)式的逆运算,可由 $\Phi_2$ 得到相应的标架$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \\ \boldsymbol{n}' \end{pmatrix}$. 这时没有 Bäcklund 线汇,不能用代数方法得出曲面的表达式,但

$$
\omega'^1 = \cosh\frac{\alpha_2}{2}\mathrm{d}u, \qquad \omega'^2 = \sinh\frac{\alpha_2}{2}\mathrm{d}v \tag{4.280}
$$

为已知,方程

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \omega'^1\boldsymbol{e}_1' + \omega'^2\boldsymbol{e}_2' \tag{4.281}
$$

的可积条件满足,所以正常曲率曲面 $\boldsymbol{r}'$可以通过普通积分(即不必解微分方程)而得到. 不仅如此,这正常曲率曲面的 Lie 变换也可以得出,这就是应用 Darboux 变换构作欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中正常曲率曲面的方法. 如果一个正常曲率曲面及其 Lie 变换都已知道,则其算法就是纯代数算法加上普通的积分.

根据上面的论述,常平均曲率曲面和正常曲率曲面是相互平行的. 新的常平均曲率曲面就由新的正常曲率曲面的适当的平行曲面得出的(此时 $K=1$, $l=\pm 1$). 由于 $b_{11}\neq b_{22}$, $b_{11}b_{22}=1$, 所以 $1-b_{11}\neq 0$, $1-b_{22}\neq 0$, 而平行曲面是存在且正则的.

**定理 4.17** 如果知道一张在 Chebyshev 坐标表达下非球面的正常曲率(常平均曲率)曲面及其 Lie 变换,则通过代数方法并作一次普通积分就可以得到新的非球面的正常曲率曲面(常平均曲率曲面)及其 Lie 变换.

这个过程可以无限地延续下去,所以只要知道互为 Lie 变换的一族非球面的正常曲率曲面或常平均曲率曲面,就可以显式地得到无穷系列的这类曲面,但和负常曲率情形不同,那时的算法是纯代数的,而这时还要作一次积分.

### 4.5.3 Minkowski 空间的情形[39]

需要区分曲面为类时或类空的情形.

(1) 类空情形

设 $S$ 是类空常曲率曲面,取曲率线单位切向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 和法线 $\boldsymbol{n}$ 组成正交标架

$$\omega_1^3 = b_{11}\omega^2,\quad \omega_2^3 = b_{22}\omega^2. \tag{4.282}$$

由于 $\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = 1,\ \boldsymbol{n}^2 = -1$,　所以 $\omega_1^3 = \omega_3^1,\ \omega_2^3 = \omega_3^2$.

平行曲面 $S(l)$ 的方程为

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + l\boldsymbol{n}, \tag{4.283}$$

微分得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^* = \omega^a\boldsymbol{e}_a + l\omega_3^a\boldsymbol{e}_a = \omega^{*a}\boldsymbol{e}_a, \tag{4.284}$$

所以

$$\begin{aligned}\omega^{*1} &= \omega^1 + l\omega_1^3 = (1+lb_{11})\omega^1,\\ \omega^{*2} &= \omega^2 + l\omega_2^3 = (1+lb_{22})\omega^2.\end{aligned} \tag{4.285}$$

由于

$$\omega_a^{*3} = \omega_a^3,$$

所以

$$b_{11}^* = \frac{b_{11}}{1+lb_{11}},\quad b_{22}^* = \frac{b_{22}}{1+lb_{22}},\quad b_{12}^* = 0. \tag{4.286}$$

由此得

$$\begin{aligned}K^* &= -b_{11}^*b_{22}^* = \frac{K}{1+2lH-l^2K},\\ H^* &= \frac{1}{2}(b_{11}^*+b_{22}^*) = \frac{H-lK}{1+2lH-l^2K}.\end{aligned} \tag{4.287}$$

现设 $K$ 为常数,$H$ 为非常数,$H^*$ 为常数,由于

$$H(2lH^*-1) = -lK-(1-l^2K)H^*,$$

所以

$$H^* = \frac{1}{2l}, \quad K = -\frac{1}{l^2}. \tag{4.288}$$

相反地,若 $H$ 为常数,$K^*$ 为常数,$K$ 为非常数,则由

$$K(1 + l^2 K^*) = K^*(1 + 2lH),$$

可以得到

$$H = -\frac{1}{2l}, \quad K^* = -\frac{1}{l^2}. \tag{4.289}$$

从而有如下定理:

**定理 4.18** 对每一个 Gauss 曲率为$-\frac{1}{l^2}$的类空曲面,与它距离为$\pm l$的两张平行曲面为常平均曲率,$H = \pm\frac{1}{2l}$. 每一平均曲率为$-\frac{1}{2l}$的类空曲面如非常曲率曲面,则必有一张和它距离为 $l$ 的负常曲率曲面,其 Gauss 曲率为$-\frac{1}{l^2}$.

一般的类空的常平均曲率曲面和类空的负常曲率曲面的构作方法(见§4.2)是相互等价的(因为它们互为平行曲面). 从而有如下定理:

**定理 4.19** 从一平均曲率为常数的类空曲面出发,经过构作平行曲面、Bäcklund 变换和 Darboux 变换等方法,可以构作无限系列的类空常平均曲率曲面. 如果初始曲面的 Chebyshev 标架及其 Lie 变换为已知,则算法是纯代数的.

**注 4.6** 我们并不排除这一无限系列具有周期性的可能. 又这时 Bäcklund 线汇属于§4.3.3中的情形(d),作 Bäcklund 变换时中间要经过类时的负常曲率曲面.

(2) 类时情形

现设 $S$ 是类时曲面,$\boldsymbol{e}_1^2 = 1$, $\boldsymbol{e}_2^2 = -1$. 与类空情形相类似,但这时 $\omega_1^3 = -\omega_3^1$, $\omega_2^3 = \omega_3^2$. 故有下式成立:

$$b_{11}^* = \frac{b_{11}}{1 - lb_{11}}, \quad b_{22}^* = \frac{b_{22}}{1 + lb_{22}}, \quad b_{12} = 0. \tag{4.290}$$

由于 $K = -b_{11}b_{22}$, $H = \frac{1}{2}(b_{11} - b_{22})$, 所以有

$$K^* = \frac{K}{1-2lH+l^2K}, \quad H^* = \frac{H-lK}{1-2lH+l^2K}. \tag{4.291}$$

从 $K$ 为常数、$H^*$ 为常数推出

$$H^* = -\frac{1}{2l}, \quad K = \frac{1}{l^2}. \tag{4.292}$$

从 $K^*$ 为常数,$H$ 为常数推出

$$H = \frac{1}{2l}, \quad K^* = \frac{1}{l^2}. \tag{4.293}$$

从而有如下定理:

**定理 4.20** 类时正常曲率曲面 $\left(K = \frac{1}{l^2}\right)$ 的两侧距离为 $l$ 的平行曲面是平均曲率为$\pm\frac{1}{2l}$的常平均曲率曲面. 在类时常平均曲率 $\left(H = \frac{1}{2l}\right)$ 曲面的一侧有一张正常曲率的平行曲面,距离为 $l$,Gauss 曲率为$\frac{1}{l^2}$.

所以构作类时常平均曲率曲面的问题和构作类时正常曲率曲面的问题是等价的.

**定理 4.21** 已知一张类时的正常平均曲率曲面,可以通过作平行曲面、Bäcklund 变换和 Darboux 变换,求得无限系列的类时常平均曲率曲面.

这时 Bäcklund 线汇属于§4.3.4中的情形(2). 如果知道初始曲面的 Chebyshev 标架及其 Lie 变换,则算法是纯代数的.

# §4.6 射影空间的周期 Laplace 序列

## 4.6.1 曲面的 Laplace 变换

射影空间 $P^3$ 由三维欧氏空间添上无限远平面而构成. 更精确地说,对 4 维向量空间 $\mathbf{R}^4$,其中元素为 $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$. 作$\mathbf{R}\setminus\{0\}$,即集合$\{x \mid x_1, x_2, x_3, x_4$ 不全为零$\}$,并令 $x(\in \mathbf{R}^4\setminus\{0\})$ 与 $\lambda x(\lambda \neq 0)$ 等价. 这种等价类便定义为 $P^3$中的一点. 换句话说,$P^3$中的点由$(x_1, x_2, x_3, x_4)$定义

$(x_1, \cdots, x_4$ 不全为 0),但 $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)(\lambda \neq 0)$ 与 $x$ 表示同一点. $(x_1, x_2, x_3, x_4)$和 $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ 称为此点的**齐次坐标**. 一个点的齐次坐标确定后,这一点就确定了,但成比例的齐次坐标表示同一点. 如 $x_4 \neq 0$, 则 $P^3$ 中点$(x, y, z, 1)$的集合$(x, y, z)$可以看成是三维欧氏空间(仿射空间)中的点的坐标,而$(x, y, z, 0)$则可看成为无限远点,无限远点的全体构成无限远平面. 我们研究射影几何时没有用 $\mathbf{R}^3$ 的欧氏度量,只是讨论在 $P^3$ 中的射影变换

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\det(a_{ij}) \neq 0)$$

下不变的性质,特别是两个不共线的点 $x$ 和 $y$ 的连线是$\lambda x + \mu y$ 的集合,三个不在一直线上的点 $x, y, z$ 所决定的平面是$\lambda x + \mu y + \sigma z$ 的集合,$(\lambda, \mu)$或$(\lambda, \mu, \sigma)$不全为 0.

我们用

$$x = x(u, v) \tag{4.294}$$

或

$$x_i = x_i(u, v) \tag{4.295}$$

表示一张曲面. $x$ 和 $x_u$ 的连线是曲面的 $u$ 曲线(即 $v =$ 常数的曲线)的切线,$x$ 和 $x_v$ 的连线是曲面的 $v$ 曲线的切线. 假定作为 4 维向量的 $x, x_u, x_v$ 是线性无关的. 这样就表示两条切线不会相互重合,切平面是存在的,这也保证了曲面的正则性.

我们选取曲面的参数$(u, v)$,使沿着 $v$ 曲线,$u$ 曲线的切线 $t_u$ 构成一张可展曲面,这就是说,在各条 $t_u$ 上存在点$\lambda x + x_u$,使得 $v$ 变动时这些点所画的曲线也以 $t_u$ 为切线,其解析条件是

$$(\lambda x + x_u)_v = x_{uv} + \lambda x_v + \lambda_v x \tag{4.296}$$

为 $x$ 和 $x_u$ 的线性组合,因而曲面的参数表示 $x(u, v)$满足

$$x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0. \tag{4.297}$$

相反地,如果 $x$ 满足(4.297)式,在 $u$ 曲线的切线 $t_u$ 上取一点 $y = x_u + bx$,当 $v$ 变化时($u$ 固定),

$$\begin{aligned} y_v &= (x_u + bx)_v = x_{uv} + b x_v + b_v x \\ &= -a x_u + (b_v - c) x \end{aligned} \tag{4.298}$$

为 $x_u$ 和 $x$ 的线性组合，因而也在 $t_u$ 之上，所以 $t_u$ 组成一张可展曲面.

由于(4.297)式在形式上是对称的，所以(4.297)式成立时，沿 $u$ 曲线和 $v$ 曲线的切线也构成可展曲面，这样两组参数曲线组成一个共轭网，$u$，$v$ 就称为**共轭网参数**. 事实上，这个概念在普通微分几何中的欧氏空间曲面论里已经见到过.

由(4.298)式可以看到，$y_{uv}+ay_u$ 是 $x$ 和 $x_u$ 的线性组合，因而也是 $y_v$ 和 $y$ 的线性组合，从而 $y$ 满足形如

$$y_{uv}+a_1y_u+b_1y_v+c_1y=0 \tag{4.299}$$

的方程，这里 $a_1$，$b_1$，$c_1$ 是适当的函数. 从此可见，$u$，$v$ 参数在曲面 $y(u,v)$ 上也构成一个共轭网. 曲面 $y(u, v)$ 记为 $S_1$，它为 $S$ 的 Laplace 变换($u$ 方向)，它和 $S$ 有公共的切线. $S_1$ 和 $S$ 是一个线汇($S$ 的 $u$ 曲线的切线所构成)的两个焦曲面. 由于 $S$ 的 $u$ 曲线的切线就是 $S_1$ 的 $v$ 曲线的切线，$S$ 是 $S_1$ 在 $v$ 方向的 Laplace 变换. 从 $S_1$ 也可再作 $u$ 方向的 Laplace 变换，得到 $S_2$，然后得到 $S_3$，$S_4$，…. 同样，从 $S$ 作 $v$ 方向的 Laplace 变换，得到曲面系列 $S_{-1}$，$S_{-2}$，…. 把 $S$ 记为 $S_0$，就有伸向两侧的曲面序列

$$\cdots,\ S_{-3},\ S_{-2},\ S_{-1},\ S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,$$

在其中，$S_{i+1}$ 是 $S_i$ 的 $u$ 方向的 Laplace 变换，$S_{i-1}$ 是 $S_i$ 的 $v$ 方向的 Laplace 变换[14]. 前面讨论过的 Bäcklund 线汇和 Bäcklund 变换是其特殊情况.

一般来说，曲面的 Laplace 序列是一个无限的序列，但如果有 $S_0=S_k$，就成了一个封闭的 Laplace 序列，或周期 $k$ 的 Laplace 序列.

### 4.6.2　苏链(Finikoff 构图)[50]

考虑一个周期为 4 的 Laplace 序列，其四张曲面 $S$，$S_1$，$S_2$，$S_3$($S_4=S$)表示为

$$M_i=M_i(u,\ v),$$

$M_i$ 是一个 4 维向量. 依据定义，$M_1$ 的 $u$ 方向导数是 $M_1$ 和 $M_2$ 的线性组合，$M_1$ 的 $v$ 方向导数是 $M_4$ 和 $M_1$ 的线性组合，对 $M_2$，$M_3$，$M_4$，也有类似的情况，因而有

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & q_1 \\ q_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix}. \tag{4.300}$$

因为 $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ 是齐次坐标,所以可用 $\sigma_i M_i(\sigma_i \neq 0)$ 代表 $M_i$ 而使方程得到简化,例如用 $\sigma_1 M_1$ 代替 $M_1$ 时,有下式成立:

$$(\sigma_1 M_1)_u = \left(\frac{\sigma_{1u}}{\sigma_1} + a_1\right)(\sigma_1 M_1) + \frac{\sigma_1 b_1}{\sigma_2}(\sigma_2 M_2),$$

可选取 $\sigma$,使 $\sigma_{1u}/\sigma_1 + a_1 = 0$,由此可见 $a_1$ 以及 $a_2$, $a_3$, $a_4$ 均可转化为 0. 此外,还可以利用可积条件作进一步的简化. Finikoff 和苏步青在 20 世纪 30 年代从几何性质出发,提出一个特殊的周期 4 的 Laplace 序列,在文献中称为**苏链**或 Finikoff **构图**,它除了上面所说的那些简化外,还有一些特殊的几何条件[22, 72],从而它的微分方程有更特殊的形式. 我们就用 Darboux 变换研究这种构图. 为今后讨论方便起见,把 $M_1$, $M_3$ 记为 $N_1$, $N_2$; $M_2$, $M_4$ 记为 $N_3$, $N_4$,这一刻画苏链的微分方程为

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}_u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{e}^{-\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\phi} \\ 0 & \mathrm{e}^{\phi} & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}_v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\phi_v & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\phi_v & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \phi_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \phi_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}. \tag{4.301}$$

我们的目的是利用 Darboux 变换来显式构作苏链,并得出其若干性质[50].

为此,利用变换 $u \to \dfrac{u}{\lambda}$, $v \to \lambda v$ 而引入谱参数 $\lambda$,使得苏链的微分方程(4.301)式具有谱参数 $\lambda$,从而成为一个 Lax 对

$$
\begin{aligned}
\Phi_u &= \lambda U \Phi = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\phi} \\ 0 & e^{\phi} & 0 & 0 \\ e^{\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\
\Phi_v &= V\Phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\phi_v & 0 & 0 & 1/\lambda \\ 0 & -\phi_v & 1/\lambda & 0 \\ -1/\lambda & 0 & \phi_v & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 & \phi_v \end{pmatrix}\Phi.
\end{aligned} \tag{4.302}
$$

这时显然可见,Lax 对不单是求解微分方程的工具,它的解本身就是我们所研究的对象,且是依赖于参数 $\lambda$ 的一系列苏链. 此 Lax 对的可积条件(设 $\phi$ 和 $\lambda$ 无关)为

$$\phi_{uv} = \sinh \phi. \tag{4.303}$$

虽然知道这个方程可以用 Darboux 变换求显式解,但我们的目标是在求 $4\times 4$ 阵的解 $\Phi$,因而要求作 $4\times 4$ 的 Darboux 阵. 由于直接制作 $4\times 4$ Darboux 阵相当困难,我们运用一定的技巧,通过构作 $2\times 2$ Darboux 阵而得到 $4\times 4$ Darboux 阵.

引入 $2\times 2$ 阵

$$
\begin{aligned}
a &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.304}
$$

可以把 $U$, $V$ 写成分块阵的形式:

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\phi}a \\ e^{\phi}b & 0 \end{pmatrix}, \quad V = C + \frac{1}{\lambda}D, \tag{4.305}$$

其中

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\phi_v I & 0 \\ 0 & \phi_v I \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.306}$$

因而 Lax 对具有形式

$$\Phi_u = \lambda U\Phi, \quad \Phi_v = \left(C + \frac{1}{\lambda}D\right)\Phi. \tag{4.307}$$

作 $2\times 2$ 的 Lax 对

$$\Psi_u = \lambda \widetilde{U}\Psi, \quad \Psi_v = \widetilde{V}\Psi, \tag{4.308}$$

式中
$$\widetilde{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\phi} \\ e^{\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\phi_v & 1/\lambda \\ 1/\lambda & \phi_v \end{pmatrix}. \tag{4.309}$$

(4.308)式就是在 § 4.3 中曾出现的 sinh-Gordon 方程的 Lax 对，只是那时的$(\xi, \eta)$被换成了现在的$(u, v)$. 设 $h_1$, $h_2$ 是 $2\times 2$ Lax 对(4.308)式当 $\lambda = \lambda_1$ 时的列向量解，我们已知 Darboux 阵为

$$\widetilde{D}(\lambda) = I - \frac{\lambda}{\lambda_1}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{h_1}{h_2} \\ \dfrac{h_2}{h_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_1}{h_2} \\ -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_2}{h_1} & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.310}$$

而 sinh-Gordon 方程的新解为

$$e^{\phi_1} = e^{-\phi}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2. \tag{4.311}$$

作 $2\times 2$ 阵到 $4\times 4$ 阵的对应

$$E: \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha I & \beta a \\ \gamma b & \delta I \end{pmatrix}. \tag{4.312}$$

在这个对应下，阵$\widetilde{D}(\lambda)$对应于

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} I & -\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{h_1}{h_2}a \\ -\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{h_2}{h_1}b & I \end{pmatrix}. \tag{4.313}$$

在此用分块乘法的规则和 $h_1$, $h_2$ 所满足的微分方程，就可以知道 $\Phi_1(\lambda) = D(\lambda)\Phi(\lambda)$ 满足

$$\Phi_{1u}(\lambda) = \lambda U_1\Phi_1(\lambda), \quad \Phi_{1v}(\lambda) = V_1\Phi_1(\lambda), \tag{4.314}$$

这里 $U_1$, $V_1$ 是将 $U$, $V$ 中的 $\phi$ 换为(4.311)式中的 $\phi_1$ 而得到的.

由于

$$\Phi_1(\lambda)=\begin{pmatrix} I & -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_1}{h_2}a \\ -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_2}{h_1}b & I \end{pmatrix}\Phi(\lambda), \tag{4.315}$$

关于 $u$ 微分,为使(4.314)式的第一式成立,则应有下式:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)_u a \\ -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\left(\dfrac{h_2}{h_1}\right)_u b & 0 \end{pmatrix}+\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} I & -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_1}{h_2}a \\ -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_2}{h_1}b & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\phi}a \\ e^{\phi}b & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\phi_1}a \\ e^{\phi_1}b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_1}{h_2}a \\ -\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\dfrac{h_2}{h_1}b & I \end{pmatrix}. \tag{4.316}$$

用阵的分块乘法,令 $\lambda^2$ 项相等,就得出(4.172)式的第一式

$$e^{\phi_1}=\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 e^{-\phi},$$

令 $\lambda$ 的一次项相等,就得出

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)_u+\frac{e^{-\phi}}{2}-\frac{e^{-\phi_1}}{2}=0, \\ -\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_u+\frac{e^{-\phi}}{2}-\frac{e^{-\phi_1}}{2}=0. \end{aligned} \tag{4.317}$$

这就是 $2\times2$ Darboux 阵中 $\dfrac{h_1}{h_2}$ 和 $\dfrac{h_2}{h_1}$ 所应满足的方程,而当 $h_1$, $h_2$ 是 $2\times2$ Lax 对的列向量解时,这方程是满足的.

对于(4.314)式的第二个方程,也可作同样的论证,这里就不重复了.

这样,利用 $2\times2$ 的 Darboux 阵 $\widetilde{D}(\lambda)$ 得出的 $D(\lambda)$ 的确是苏链的 Darboux 阵. 因而得到如下定理:

**定理 4.22**　已知一个苏链和它相应的 sinh-Gordon 方程的 $2\times2$ Lax 对的基本解,使用 Darboux 变换(4.315)就可以用纯代数算法得出一系列的

苏链.

我们还可以得出另外一些几何性质. 如果记 $\frac{h_1}{h_2}=\mu$, 则 $D(\lambda)$可写成

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda_1}\mu & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\lambda}{\lambda_1}\mu\\ 0 & -\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{1}{\mu} & 1 & 0\\ -\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{4.318}$$

因而新的苏链

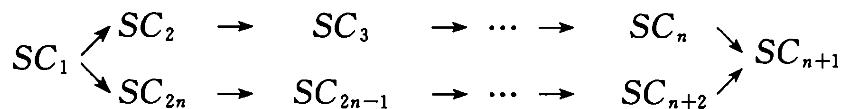
$$\begin{pmatrix}N_1'\\ N_2'\\ N_3'\\ N_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{\lambda_1}\mu & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\lambda_1}\mu\\ 0 & -\frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\mu} & 1 & 0\\ -\frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\\ N_3\\ N_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N_1+\frac{\mu}{\lambda_1}N_3\\ N_2-\frac{\mu}{\lambda_1}N_4\\ N_3-\frac{1}{\lambda_1\mu}N_1\\ N_4-\frac{1}{\lambda_1\mu}N_2\end{pmatrix}. \tag{4.319}$$

$u$, $v$ 固定时, $N_1N_3N_2N_4$ 构成一个空间四边形. 经过 Darboux 变换, $N_1'$, $N_3'$, $N_2'$, $N_4'$分别在 $N_1$, $N_3$, $N_2$, $N_4$ 的四条边上,我们称第二个四边形衔接于第一个四边形. 有如下定理:

**定理 4.23** 一次 Darboux 变换所得到的苏链中的空间四边形衔接于原苏链中的空间四边形.

在第 1 章中已经有 Darboux 变换的可换性定理,即依照不同的两组参数以不同的次序进行 Darboux 变换,可以得到相同的结果(解以及 Lax 对的基本解相同).

用 $SC_i(i=1, 2, \cdots, 2n)$ 表示苏链,这是从 $SC_1$ 出发,用 $n$ 组参数以不同次序作 Darboux 变换而得到的. 可换性定理可以用图形来表示:



这是一个可换性定理，这里每个 $SC_i$ 都和 $SC_{i+1}$ 相衔接，最终得到同一的 $SC_{n+1}$. 这里的 Darboux 变换可以作逆变换，容易见到，它们也是 Darboux 变换. 上面的图形还可改为

$$\begin{array}{ccccccccc} & \nearrow SC_2 & \to & SC_3 & \to \cdots \to & SC_n & \searrow & \\ SC_1 & & & & & & & SC_{n+1} \\ & \nwarrow SC_{2n} & \leftarrow & SC_{2n-1} & \leftarrow \cdots \leftarrow & SC_{n+2} & \swarrow & \end{array}.$$

从而得到周期为 $2n$ 的解的系列，这里 $n=2, 3, 4, \cdots$，因而周期为 4，6，8，…. 有如下定理：

**定理 4.24**　存在着周期为 $2n(n\geqslant 1)$ 的苏链系列，其中每一个苏链中的四边形和其前面一个四边形相衔接.

特别是周期 4 的苏链系列共有四个苏链，它们的线汇所成的四边形依次相衔接.

## 4.6.3　例[50]

最原始的苏链是对应于解 $\phi=0$ 的情形. 这时有：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}_u &= \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}_v &= \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.320}$$

它们可以显式解出. 第一式可写为

$$N_{1u}=-\frac{\lambda}{2}N_3,\quad N_{3u}=\frac{\lambda}{2}N_2,$$

$$N_{2u}=\frac{\lambda}{2}N_4,\quad N_{4u}=\frac{\lambda}{2}N_1,$$

由此可见

$$N_{1uuuu}=-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 N_1. \tag{4.321}$$

解此常微分方程,$N_1$ 具有形式

$$N_1 = A_1 \cosh\beta\cos\beta + A_2\cosh\beta\sin\beta + A_3 \sinh\beta\cos\beta + A_4\sinh\beta\sin\beta, \tag{4.322}$$

式中 $\beta = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4}u$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ 是 4 维行向量,和 $u$ 无关. 从此有

$$\begin{aligned}
N_3 &= -\frac{2}{\lambda}N_{1u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-(A_2+A_3)\cosh\beta\cos\beta \\
&\quad + (A_1 - A_4)\cosh\beta\sin\beta - (A_1 + A_4)\sinh\beta\cos\beta \\
&\quad + (A_3 - A_2)\sinh\beta\sin\beta), \\
N_2 &= \frac{2}{\lambda}N_{3u} = -A_4\cosh\beta\cos\beta + A_3\cosh\beta\sin\beta - A_2\sinh\beta\cos\beta \\
&\quad + A_1\sinh\beta\sin\beta, \\
N_4 &= \frac{2}{\lambda}N_{2u} = \frac{\sqrt{2}}{2}((A_3 - A_2)\cosh\beta\cos\beta \\
&\quad + (A_1 + A_4)\cosh\beta\sin\beta + (A_1 - A_4)\sinh\beta\cos\beta \\
&\quad + (A_2 + A_3)\sinh\beta\sin\beta).
\end{aligned} \tag{4.323}$$

考虑到(4.320)式的第二式,即有

$$N_{1v} = \frac{1}{2\lambda}N_4, \quad N_{2v} = \frac{1}{2\lambda}N_3, \quad N_{3v} = -\frac{1}{2\lambda}N_1, \quad N_{4v} = \frac{1}{2\lambda}N_2,$$

于是有

$$\begin{aligned}
A_{1v} &= \frac{1}{2\lambda}\frac{\sqrt{2}}{2}(A_3 - A_2), \ A_{2v} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\sqrt{2}}{2}(A_4 + A_1), \\
A_{3v} &= \frac{1}{2\lambda}\frac{\sqrt{2}}{2}(A_1 - A_4), \ A_{4v} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\sqrt{2}}{2}(A_2 + A_3),
\end{aligned} \tag{4.324}$$

同时也有 $A_{1vvvv} = -\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^4 A_1$ 等. 所以 $A_i$ 的各个分量

$$A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

均为 $\cosh\alpha\cos\alpha$，$\cosh\alpha\sin\alpha$，$\sinh\alpha\cos\alpha$，$\sinh\alpha\sin\alpha$ 的常系数线性组合，这里 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4\lambda}v$. 取初始条件 $u=v=0$ 时，

$$\begin{aligned} N_1 &= (1,0,0,0), \quad N_2=(0,1,0,0), \\ N_3 &= (0,0,1,0), \quad N_4=(0,0,0,1), \end{aligned} \tag{4.325}$$

可以得出

$$A_1=\begin{pmatrix} \cosh\alpha\cos\alpha \\ \sinh\alpha\sin\alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sinh\alpha\cos\alpha+\cosh\alpha\sin\alpha) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\alpha\sin\alpha+\sinh\alpha\cos\alpha) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} \cosh\alpha\sin\alpha \\ -\sinh\alpha\cos\alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cosh\alpha\cos\alpha-\sinh\alpha\sin\alpha) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cosh\alpha\cos\alpha+\sinh\alpha\sin\alpha) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} \sinh\alpha\cos\alpha \\ \cosh\alpha\sin\alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cosh\alpha\cos\alpha+\sinh\alpha\sin\alpha) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\alpha\cos\alpha+\sinh\alpha\sin\alpha) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$A_4=\begin{pmatrix} \sinh\alpha\sin\alpha \\ -\cosh\alpha\cos\alpha \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\alpha\sin\alpha+\sinh\alpha\cos\alpha) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\alpha\sin\alpha-\sinh\alpha\cos\alpha) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

代入(4.323)式，并令 $\lambda=1$，就得到第一个苏链. 为方便计，令

$\alpha+\beta=\sigma, \alpha-\beta=\tau$. 当 $\lambda=1$ 时, $\sigma=\frac{\sqrt{2}}{4}(u+v)$, $\tau=\frac{\sqrt{2}}{4}(u-v)$.

$$N_1=\begin{pmatrix}\cosh\sigma\cos\tau\\ \sinh\sigma\sin\tau\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\sigma\sin\tau-\sinh\sigma\cos\tau)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\sigma\sin\tau+\sinh\sigma\cos\tau)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$N_2=\begin{pmatrix}-\sinh\sigma\sin\tau\\ \cosh\sigma\cos\tau\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\sigma\sin\tau+\sinh\sigma\cos\tau)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sinh\sigma\cos\tau-\cosh\sigma\sin\tau)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$N_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}(-\cosh\sigma\sin\tau-\sinh\sigma\cos\tau)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cosh\sigma\sin\tau+\sinh\sigma\cos\tau)\\ \cosh\sigma\cos\tau\\ -\sinh\sigma\sin\tau\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$N_4=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}(-\cosh\sigma\sin\tau+\sinh\sigma\cos\tau)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\sigma\sin\tau+\sinh\sigma\cos\tau)\\ \sinh\sigma\sin\tau\\ \cosh\sigma\cos\tau\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

容易看出, $N_1$, $N_2$ 构成相同二次曲面

$$x_3^2-x_4^2=-2x_1x_2; \tag{4.326}$$

$N_3$, $N_4$ 构成另一个相同的二次曲面

$$x_1^2-x_2^2=-2x_3x_4. \tag{4.327}$$

这是苏链的第一个例子.

为作第二个苏链,由(4.310)式知, $2\times 2$ 的 Darboux 阵为

$$I-\frac{\lambda}{\lambda_1}\begin{pmatrix}0 & \tanh\gamma_1\\ \coth\gamma_1 & 0\end{pmatrix},$$

式中 $\gamma_1=\frac{\lambda_1}{2}u+\frac{1}{2\lambda_1}v$, 由(4.313)式可知苏链的 Darboux 阵为

$$I-\frac{\lambda}{\lambda_1}\begin{pmatrix}0 & a\tanh\gamma_1\\ b\coth\gamma_1 & 0\end{pmatrix}.$$

令 $\lambda=1$, 得第二个苏链的表达式

$$\begin{pmatrix}N_1'\\ N_2'\\ N_3'\\ N_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N_1+\dfrac{\tanh\gamma_1}{\lambda_1}N_3\\ N_2-\dfrac{\tanh\gamma_1}{\lambda_1}N_4\\ N_3-\dfrac{\coth\gamma_1}{\lambda_1}N_1\\ N_4-\dfrac{\coth\gamma_1}{\lambda_1}N_2\end{pmatrix},\tag{4.328}$$

并可据此陆续作出解的系列[50].

附带说明,周期的 Laplace 序列与近年来研究得很多的 Toda 偏微分方程有密切的联系[52].

# 第 5 章　Darboux 变换与调和映照

调和映照是微分几何中重要的研究对象[18, 19],它与数学物理及孤立子理论均有密切联系[34, 45].在本章中首先介绍调和映照的概念,接着讨论从欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 或 Minkowski 平面 $\mathbf{R}^{1,1}$ 到欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的球面 $S^2$ 以及 Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 的球面 $H^2$ 和 $S^{1,1}$ 的调和映照,证明它们可以归结为第 4 章中所论述的各种类型的常曲率曲面的构作,且指出它们和某些特殊非线性方程(包括孤立子方程)的关系.因此,从已知的调和映照及其拓广解出发,可以利用 Darboux 变换,用纯代数方法来构作相应的调和映照系列.

本章的另一主题是将 Darboux 变换应用于 $\mathbf{R}^{1,1}$ 及 $\mathbf{R}^2$ 到群 $U(N)$ 的调和映照,得到显式表达的解,证明孤立子解的弹性散射的性质,并详细地讨论如何用 Darboux 变换来研究酉子解(uniton)的问题.我们的工作与文献[74]中的研究的主要区别在于这里用 Darboux 变换,能得出解的显式表达式,算法是纯代数的.

## § 5.1　调和映照的定义与基本方程

黎曼流形和洛伦兹流形的概念是欧氏空间和 Minkowski 空间的推广.首先,它们是一个 $n$ 维的微分流形 $M$,并且有一个度量 $g$,在 $M$ 的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 下,度量 $g$ 的表达式为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

它是曲面的第一基本形式的推广.对黎曼流形而言,$(g_{ij})$ 是正定的,$\mathrm{d}s$ 表

示曲线弧长的微分. 黎曼几何是指在 $M$ 上由 $g$ 产生的几何学,它是曲面内蕴几何学的推广,当$(g_{ij})$的特征值的符号为$(+,\ \cdots,\ +,\ -)$时,$M$ 成为洛伦兹流形,$g$ 称为**洛伦兹度量**.

设 $M$ 与 $N$ 为黎曼流形或洛伦兹流形,$\phi: M\to N$ 是 $C^2$-映照. 如所熟知,映照 $\phi$ 的能量积分(在洛伦兹流形时,应称为**作用量**)由

$$E(\phi) = \int_M e(\phi)\mathrm{d}V_M \tag{5.1}$$

所定义,这里 $\mathrm{d}V_M$ 是 $M$ 的体积元素,$e(\phi)$是能量密度,在局部坐标下,它有如下的表达式:

$$e(\phi) = \underset{N}{g}_{\alpha\beta}(\phi)\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\underset{M}{g}^{ij}(x) \tag{5.2}$$

$$(\alpha,\ \beta = 1,\ \cdots,\ n;\ i,\ j = 1,\ \cdots,\ m),$$

这里 $\underset{M}{g}^{ij}$ 与 $\underset{N}{g}_{\alpha\beta}$ 分别是流形 $M$ 与 $N$ 的度量张量的反变分量与协变分量,特别,$\left(\underset{M}{g}^{ij}\right)$是$\left(\underset{M}{g}_{ij}\right)$的逆阵,$n = \dim N$, $m = \dim M$.

现在先推导泛函 $E(\phi)$的 Euler 方程. 在局部坐标下, $\mathrm{d}V_M = \sqrt{g}\mathrm{d}^m x$,这里 $g = \left|\det\left(\underset{M}{g}_{ij}\right)\right|$, 所以 $E(\phi)$的 Euler 方程应为

$$\frac{\partial e(\phi)\sqrt{g}}{\partial\phi^\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial e(\phi)\sqrt{g}}{\partial(\phi^\gamma_{,k})} = 0. \tag{5.3}$$

在下列运算中,我们规定 $g_{ij}$ 表示$\underset{M}{g}_{ij}$, $g_{\alpha\beta}$表示$\underset{N}{g}_{\alpha\beta}$,并用 $\phi^\gamma_{,k}$ 记$\dfrac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^k}$. (5.3)式的第一项是

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}(\phi)}{\partial\phi^\gamma}\phi^\alpha_{,i}\phi^\beta_{,j}g^{ij}\sqrt{g},$$

第二项是

$$\begin{aligned}
&2\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{\alpha\gamma}g^{ki}\phi^\alpha_{,i}\sqrt{g})\\
&= 2\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial\phi^\beta}g^{ki}\phi^\alpha_{,i}\phi^\beta_{,k}\sqrt{g} + g_{\alpha\gamma}\frac{\partial g^{ki}}{\partial x^k}\phi^\alpha_{,i}\sqrt{g}\right.\\
&\qquad\left. + g_{\alpha\gamma}g^{ki}\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i\partial x^k}\sqrt{g} + g_{\alpha\gamma}g^{ki}\phi^\alpha_{,i}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}\right).
\end{aligned}$$

利用 $M$ 和 $N$ 的 Christoffel 记号 $\underset{M}{\Gamma}{}^k_{ij}$，$\underset{N}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$和熟知的公式

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial \phi^\beta} = \underset{N}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} g_{\lambda\gamma} + \underset{N}{\Gamma}{}^\lambda_{\gamma\beta} g_{\alpha\lambda}, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = - g^{lj} \underset{M}{\Gamma}{}^i_{lk} - g^{il} \underset{M}{\Gamma}{}^j_{lk}, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} = \underset{M}{\Gamma}{}^i_{ik} \sqrt{g}, \tag{5.6}$$

就可将 Euler 方程写作

$$g^{ik}\left(\frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^k} - \underset{M}{\Gamma}{}^j_{ik} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^j} + \underset{N}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^k}\right) = 0. \tag{5.7}$$

**定义 5.1** 从 $M$ 到 $N$ 的映照 $\phi$，如属于 $C^2$ 且满足(5.7)式，则称 $\phi$ 是 $M$ 到 $N$ 的**调和映照**. $M$ 为出发流形，$N$ 为目标流形[18, 83].

(5.7)式是 $M$ 到 $N$ 的调和映照 $\phi$ 的偏微分方程. 如果 $M$ 是黎曼流形，即 $M$ 的度量是正定的，则(5.7)式是非线性椭圆型方程组. 如果 $M$ 为洛伦兹流形，即 $M$ 的度量为非正定且具有符号(＋, ＋, …, ＋, －)，则(5.7)式是非线性双曲型方程组[29]. 近年来，从洛伦兹流形出发的调和映照也称为**波映照**.

调和映照在数学及物理上均很重要. 它在数学上具有广阔的背景. 当 $N$ 为直线 $\mathbf{R}$ 时，调和映照 $\phi$ 就是 $M$ 上的调和函数(特别当 $M = \mathbf{R}^n$ 时，它就是普通意义下的调和函数). 当 $M$ 为直线 $\mathbf{R}$ 或圆 $S^1$ 时，调和映照就是测地线或闭测地线. 又如极小曲面，它是具有共形性质(即保持曲线交角不变)的调和映照. 从下面一些例子可进一步看出调和映照在物理上也很重要.

(1) 非线性 $\sigma$-模型或手征场是一种引起广泛注意的非线性场，它实际上是 $M \to N$ 的调和映照，这里 $M$ 是 Minkowski 空间或欧氏空间，而 $N$ 通常为齐性黎曼空间. 特别是，当 $N$ 是紧致李群时，这种映照就称为**主手征场**[65].

(2) 如所熟知，Ernst 方程是决定真空 Einstein 引力场的定态轴对称解的基本方程[21]. 可以证明，Ernst 方程是轴对称约束下能量积分

$$\int \frac{\sum_{i=1}^3\left[\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x^i}\right)^2\right]}{\phi^2} \mathrm{d}^3 x$$

的 Euler 方程，因而 Ernst 方程的解实际上是 $\mathbf{R}^3$ 到双曲平面 $H^2$ 的轴对

称调和映照,这时 $H^2$ 的度量取 Poincaré 表示

$$ds^2 = \frac{1}{\phi^2}(d\phi^2 + d\psi^2).$$

(3) 在粒子物理学中有时用弦来作为强子的模型,在 4 维弯曲时空 $V$(洛仑兹流形)中描述经典弦运动的世界面是一个类时的二维曲面,它由下述运动方程所决定:

$$\phi^\alpha_{\tau\tau} - \phi^\alpha_{\sigma\sigma} + \underset{V}{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}(\phi^\beta_\tau\phi^\gamma_\tau - \phi^\beta_\sigma\phi^\gamma_\sigma) = 0,$$

这实际上是 2 维 Minkowski 平面 $\mathbf{R}^{1,1}\to V$ 的调和映照方程[28].

(4) $\mathbf{R}^4$ 中自对偶杨-Mills 方程(在 $R$-规范下)的一部分解也可以从调和映照作出.

(5) 液晶的最简单模型是 $\mathbf{R}^2$ 到 $S^2$ 的调和映照.

我们在这里不叙述调和映照的许多重要结果,只讨论若干可以利用 Darboux 变换来显式构造的调和映照,这些映照的出发流形 $M$ 是欧氏平面 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y)\}$ 和 Minkowski 平面 $\mathbf{R}^{1,1} = \{(t, x)\}$ (或者是它们的某些区域),在这两种情形下,调和映照的方程分别是

$$\phi^\gamma_{xx} + \phi^\gamma_{yy} + \underset{N}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}(\phi^\alpha_x\phi^\beta_x + \phi^\alpha_y\phi^\beta_y) = 0 \tag{5.8}$$

与

$$\phi^\gamma_{tt} - \phi^\gamma_{xx} + \underset{N}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}(\phi^\alpha_t\phi^\beta_t - \phi^\alpha_x\phi^\beta_x) = 0. \tag{5.9}$$

## § 5.2 $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^{1,1}$到 $S^2$, $H^2$, $S^{1,1}$的调和映照

$S^2$ 表示 3 维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的球面,是 $\mathbf{R}^3$ 中满足 $\boldsymbol{l}^2 = 1$ 的点 $\boldsymbol{l}$(位置向量 $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, l_3)$) 的集合.

欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点的坐标用$(x, y)$表示,欧氏度量的微分形式为 $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

$\mathbf{R}^2$ 到 $S^2$ 的映照可记为 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}(x, y)$, 且满足 $\boldsymbol{l}^2 = 1$. 由(5.7)式或(5.8)式,经过一定的推导后可知 $\mathbf{R}^2\to S^2$ 的调和映照 $\boldsymbol{l}$ 是由方程

$$\boldsymbol{l}_{xx} + \boldsymbol{l}_{yy} + (\boldsymbol{l}^2_x + \boldsymbol{l}^2_y)\boldsymbol{l} = 0 \tag{5.10}$$

所定义的.

对(5.10)式作如下的直接推导,在这一情形下,积分(5.1)式成为

$$E(\boldsymbol{l})=\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial y}\right)^{2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

这里 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个区域,$\boldsymbol{l}$ 满足约束 $\boldsymbol{l}^2=1$. 用 Lagrange 乘子法,把 $E(\boldsymbol{l})$改写为

$$\widetilde{E}(\boldsymbol{l})=\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial y}\right)^{2}+\lambda(\boldsymbol{l}^2-1)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

这时 Euler 方程为

$$\lambda\boldsymbol{l}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial y}\right),$$

或

$$\Delta\boldsymbol{l}=\lambda\boldsymbol{l}.$$

利用 $\boldsymbol{l}^2=1$, 有 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}_x=0$, $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}_y=0$, 因此 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}_{xx}=-\boldsymbol{l}_x^2$, $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}_{yy}=-\boldsymbol{l}_y^2$, 从而得 $\lambda=-(\boldsymbol{l}_x^2+\boldsymbol{l}_y^2)$, 这就导出了(5.10)式.

如所熟知,Minkowski 平面 $\mathbf{R}^{1,1}$为最简单的 2 维洛伦兹流形,其度量形式为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2$. $\mathbf{R}^{1,1}$到 $S^2$ 的调和映照的微分方程是

$$\boldsymbol{l}_{tt}-\boldsymbol{l}_{xx}+(\boldsymbol{l}_t^2-\boldsymbol{l}_x^2)\boldsymbol{l}=0, \tag{5.11}$$

其证明和欧氏空间情况相类似.

在 Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$中,可定义两种“球面”——$H^2$ 和 $S^{1,1}$, $H^2$ 也称为**双曲平面**,它是由

$$\boldsymbol{l}^2=-1,\ l_3>0 \tag{5.12}$$

所定义的,这是 $\mathbf{R}^{2,1}$中双叶旋转双曲面的上半叶,$H^2$ 整体地实现了双曲平面的几何学(即罗巴切夫斯基几何学),而 $\mathbf{R}^3$ 中负常曲率曲面只是局部地实现了罗巴切夫斯基几何学.

$S^{1,1}$是由

$$\boldsymbol{l}^2=1 \tag{5.13}$$

所定义的,它是单叶旋转双曲面. 但在 Minkowski 空间中,它是类时曲面,具有非正定度量.

依照类似的推导可知,从 $\mathbf{R}^2$ 到 $H^2$ 和 $S^{1,1}$的调和映照方程分别是

$$\boldsymbol{l}_{xx}+\boldsymbol{l}_{yy}-(\boldsymbol{l}_x^2+\boldsymbol{l}_y^2)\boldsymbol{l}=0 \quad (\boldsymbol{l}^2=-1,\ l_3>0), \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{l}_{xx}+\boldsymbol{l}_{yy}+(\boldsymbol{l}_x^2+\boldsymbol{l}_y^2)\boldsymbol{l}=0 \quad (\boldsymbol{l}^2=1), \tag{5.15}$$

从 $\mathbf{R}^{1,1}$到 $H^2$ 和 $S^{1,1}$的调和映照方程分别是

$$\boldsymbol{l}_{tt}-\boldsymbol{l}_{xx}-(\boldsymbol{l}_t^2-\boldsymbol{l}_x^2)\boldsymbol{l}=0 \quad (\boldsymbol{l}^2=-1,\ l_3>0), \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{l}_{tt}-\boldsymbol{l}_{xx}+(\boldsymbol{l}_t^2-\boldsymbol{l}_x^2)\boldsymbol{l}=0 \quad (\boldsymbol{l}^2=1). \tag{5.17}$$

需要指出,调和映照未必定义在整个 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^{1,1}$上,也可定义在其上的某个区域上.

$\mathbf{R}^2$(以及 $\mathbf{R}^{1,1}$)上的调和映照具有共形不变性,这就是说,若 $h:\Omega\to N$ 是 $\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^{1,1}$)上某个区域 $\Omega$ 到黎曼(或洛伦兹)流形 $N$ 的调和映照,$\phi$ 是 $\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^{1,1}$)上某个区域 $\Omega_1$ 到 $\Omega$ 的共形映照,则 $\phi$ 和 $h$ 的复合映照 $h\circ\phi$ 是$\Omega_1$ 到 $N$ 的调和映照. 这容易从一般方程或能量积分的表达式中导出来. 事实上,可以证明,$n=2$ 时能量积分(5.1)式关于 $\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^{1,1}$)的共形变换是不变的,故其 Euler 方程有同样的性质,以下举两个例子作比较具体的说明:

(1) $\mathbf{R}^2\to S^2$(或 $H^2$, $S^{1,1}$)的调和映照的共形不变性:

首先把 $\mathbf{R}^2$ 看成 1 维复空间 $\mathbf{C}^1\{z=u+\mathrm{i}v\}$, $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$. 设 $z=f(w)=u(u_1,v_1)+\mathrm{i}v(u_1,v_1)$ 是区域 $\Omega_1$ 到 $\Omega$ 的共形映照,$l$ 是 $\Omega$ 到 $S^2$ 的调和映照,则 $l\circ f: l=l(x(u_1,v_1),y(u_1,v_1))$ 是 $\Omega_1$ 到 $S^2(H^2, S^{1,1})$ 的调和映照,这是因为方程(5.10)可写成

$$\boldsymbol{l}_{z\bar{z}}+(\boldsymbol{l}_z\cdot\boldsymbol{l}_{\bar{z}})\boldsymbol{l}=0 \tag{5.18}$$

的形式,而在变换 $z=z(w)$ 下,(5.18)式仍保持其形状,即化为

$$\boldsymbol{l}_{w\bar{w}}+(\boldsymbol{l}_w\cdot\boldsymbol{l}_{\bar{w}})\boldsymbol{l}=0.$$

把 $S^2$ 换为 $H^2$ 和 $S^{1,1}$,有类似的推导.

(2) $\mathbf{R}^{1,1}\to S^2$(或 $H^2$, $S^{1,1}$)的调和映照的共形不变性:

设

$$\xi=\frac{t+x}{2},\quad \eta=\frac{t-x}{2} \tag{5.19}$$

是 $\mathbf{R}^{1,1}$的特征坐标(光锥坐标),则 $\mathrm{d}s^2=4\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$, 而到 $S^2$ 的调和映照的方程(5.11)式可写为

$$\boldsymbol{l}_{\xi\eta}+(\boldsymbol{l}_\xi\cdot\boldsymbol{l}_\eta)\boldsymbol{l}=0\quad(\boldsymbol{l}^2=1).\tag{5.20}$$

$\mathbf{R}^{1,1}$平面上的共形映照$\phi$具有形式

$$\xi=f(\xi_1),\quad \eta=g(\eta_1),\tag{5.21}$$

$l\circ\phi$ 仍然是调和映照,因为它满足

$$\boldsymbol{l}_{\xi_1\eta_1}+(\boldsymbol{l}_{\xi_1}\cdot\boldsymbol{l}_{\eta_1})\boldsymbol{l}=0.$$

把 $S^2$ 换为 $H^2$, $S^{1,1}$,有类似的推导.

利用这些共形不变性,可以引入规范化的调和映照.

先注意到 $\mathbf{R}^{1,1}$上的调和映照 $\boldsymbol{l}$ 满足

$$(\boldsymbol{l}_\xi^2)_\eta=0,\quad(\boldsymbol{l}_\eta^2)_\xi=0,\quad\boldsymbol{l}^2=1.\tag{5.22}$$

事实上,如果(5.20)式成立,将它与 $\boldsymbol{l}_\xi$ 作数量积,由于 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}_\xi=0$, 即得 $(\boldsymbol{l}_\xi^2)_\eta=0$, 同样又得 $(\boldsymbol{l}_\eta^2)_\xi=0$, 因而(5.22)式成立. 反之,如果(5.22)式成立,并且 $\boldsymbol{l}_\xi$ 与 $\boldsymbol{l}_\eta$ 线性无关,则

$$\boldsymbol{l}_\xi\cdot\boldsymbol{l}_{\xi\eta}=0,\quad\boldsymbol{l}_\eta\cdot\boldsymbol{l}_{\xi\eta}=0,\tag{5.23}$$

所以

$$\boldsymbol{l}_{\xi\eta}=\sigma\boldsymbol{l}.$$

但

$$\sigma=\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}_{\xi\eta}=(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}_\xi)_\eta-\boldsymbol{l}_\xi\cdot\boldsymbol{l}_\eta=-\boldsymbol{l}_\xi\cdot\boldsymbol{l}_\eta,$$

故得知(5.20)式成立.

由(5.22)式可知

$$\boldsymbol{l}_\xi^2=f(\xi),\quad\boldsymbol{l}_\eta^2=g(\eta).$$

当 $f(\xi)\neq0$, $g(\eta)\neq0$ 时,可作 $\xi$, $\eta$ 的变换 $\xi=\xi(\xi_1)$, $\eta=\eta(\eta_1)$, 使得 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=f(\xi)$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\eta}\right)^2=g(\eta)$, 然后改记$(\xi_1,\eta_1)$为$(\xi,\eta)$,就得到

$$\boldsymbol{l}_\xi^2=\pm1,\quad\boldsymbol{l}_\eta^2=\pm1.\tag{5.24}$$

满足条件(5.24)式的调和映照称为"**规范化调和映照**"[30]. 当 $\boldsymbol{l}_\xi^2$, $\boldsymbol{l}_\eta^2$ 不为零时,调和映照必可通过形为 $\xi=\xi(\xi_1)$, $\eta=\eta(\eta_1)$ 的变换化为规范化调和映照,它在处理上有许多方便之处.

对于规范化调和映照,有

$$\boldsymbol{l}_x^2 + \boldsymbol{l}_t^2 = 1, \quad \boldsymbol{l}_t \cdot \boldsymbol{l}_x = 0 \tag{5.25}$$

成立[46]. 实际上,容易得出(5.24)式与(5.25)式是等价的. 规范化调和映照可用(5.25)式作定义[46].

从 $\mathbf{R}^2$ 出发到 $S^2(H^2,\ S^{1,1})$上的调和映照一般也可以规范化,这时,由(5.18)式和 $\boldsymbol{l}^2 = 1$ 推出 $(\boldsymbol{l}_\zeta^2)_{\bar\zeta} = 0$, $(\boldsymbol{l}_{\bar\zeta}^2)_\zeta = 0$, 特别$(\boldsymbol{l}_{\bar\zeta}^2)$是 $\zeta$ 的解析函数. 如果

$$\boldsymbol{l}_\zeta^2 = (\boldsymbol{l}_u^2 - \boldsymbol{l}_v^2) - 2\mathrm{i}\boldsymbol{l}_u \cdot \boldsymbol{l}_v = 1, \tag{5.26}$$

即

$$\boldsymbol{l}_u^2 - \boldsymbol{l}_v^2 = 1, \quad \boldsymbol{l}_u \cdot \boldsymbol{l}_v = 0. \tag{5.27}$$

这一调和映照就称为**规范化的**[46].

现设 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}(u,\ v)$ 为单连通区域 $\Omega$ 上定义的一调和映照,且 $\boldsymbol{l}_\zeta^2 \neq 0$,则 $l$ 可规范化. 事实上,作共形映照 $\zeta = \zeta(w)$,

$$\boldsymbol{l}_w^2 = \boldsymbol{l}_\zeta^2\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}w}\right)^2. \tag{5.28}$$

当 $\boldsymbol{l}_\zeta^2 \neq 0$时,微分方程 $\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 = \boldsymbol{l}_\zeta^2$ 在单连通区域$\Omega$有单值的解 $w = f(\zeta)$,$w$ 把 $\Omega$ 映照到 $\Omega_1$($\Omega_1$ 可能有自相覆盖的部分),$\Omega_1$ 到$S^2(H^2,\ S^{1,1})$的映照 $l\circ f^{-1}$是已经规范化的调和映照.

在第 4 章中已经讲到,在 $\mathbf{R}^3$ 和 $\mathbf{R}^{2,1}$中存在各种类型的常曲率曲面,各自存在(在无脐点的假设下)Chebyshev 坐标($u$, $v$)及相应的 Chebyshev 标架($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}$),我们称由 Chebyshev 坐标所定义的 $\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^{1,1}$)上区域到曲面的映照为 Chebyshev 映照,而曲面的法线 $\boldsymbol{n}$ 定义了曲面到 $S^2(H^2,\ S^{1,1})$的 Gauss 映照.

有如下定理:

**定理 5.1**　Chebyshev 映照和 Gauss 映照的复合为规范化的调和映照,其逆亦真[46].

现分若干情况给出证明:

(a) $\mathbf{R}^{1,1}\to S^2$

设 $\boldsymbol{l}$ 为规范化的调和映照. 取 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,使 $\boldsymbol{e}_1$ 为 $\boldsymbol{l}_t$ 方向的单位向量, $\boldsymbol{e}_2$ 为 $\boldsymbol{l}_x$ 方向的单位向量,由(5.25)式可知道, $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 必正交,而且存在 $x$, $t$ 的函数 $\alpha$,使得

$$\boldsymbol{l}_t = -\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{l}_x = \cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{e}_2, \tag{5.29}$$

并且由于 $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 为单位正交标架,必有下式成立:

$$\boldsymbol{e}_{1t} = \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{l} + \sigma\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_{1x} = \tau\boldsymbol{e}_2, \tag{5.30}$$

$$\boldsymbol{e}_{2t} = -\sigma\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_{2x} = -\cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{l} - \tau\boldsymbol{e}_1. \tag{5.31}$$

由它们的可积条件得

$$\sigma = \frac{1}{2}\alpha_x, \quad \tau = \frac{1}{2}\alpha_t \tag{5.32}$$

以及

$$\alpha_{tt} - \alpha_{xx} = \sin\alpha. \tag{5.33}$$

改记 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n}$, 于是有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix}0 & \frac{\alpha_x}{2} & \sin\frac{\alpha}{2}\\ -\frac{\alpha_x}{2} & 0 & 0\\ -\sin\frac{\alpha}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix}0 & \frac{\alpha_t}{2} & 0\\ -\frac{\alpha_t}{2} & 0 & -\cos\frac{\alpha}{2}\\ 0 & \cos\frac{\alpha}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}, \tag{5.34}$$

这正好是负常曲率曲面的 Chebyshev 标架所满足的方程, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n}$ 就是法向量, $\boldsymbol{l}(u, v)$是 Gauss 映照. 这就证明了 $\mathbf{R}^{1,1} \to S^2$ 的规范化的调和映照就是 Chebyshev 映照和 Gauss 映照的复合. 反过来的事实也是显然的,这是因为有

$$\boldsymbol{n}_\xi^2 = (\boldsymbol{n}_t + \boldsymbol{n}_x)^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

和

$$\boldsymbol{n}_\eta^2 = (\boldsymbol{n}_t - \boldsymbol{n}_x)^2 = 1$$

成立,并且 $\boldsymbol{n}_\xi$ 和 $\boldsymbol{n}_\eta$ 线性无关.

(b) $\mathbf{R}^2 \to H^2$

设 $\boldsymbol{l}(x, y)$是规范化的调和映照,则(5.25)式成立. 记 $\boldsymbol{l}_u$, $\boldsymbol{l}_v$ 方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,记 $\boldsymbol{l}$ 为 $\boldsymbol{n}$. 这时,可选取函数 $\alpha$,使

$$\boldsymbol{l}_u = \cosh\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{l}_v = \sinh\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{e}_2.$$

与(a)中的情况一样,它们满足一组微分方程,和 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中类空负常曲率曲面的 Chebyshev 标架所满足的方程(§4.3.2 中(2))是一致的,$\boldsymbol{n}$ 就是这个曲面到 $H^2$ 的 Gauss 映照.

其余情况也完全类似地可得到证明[45, 49]. 下面是一些规范化的调和映照与相应的常曲率曲面以及非线性偏微分方程:

| 出发空间 | 象　空　间 | 相应常曲率曲面 | 微　分　方　程 |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{R}^2$ | $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ | 正常曲率 | $\Delta\alpha = -\sinh\alpha$ |
| | $H^2 \subset \mathbf{R}^{2,1}$ | 负常曲率(类空) | $\Delta\alpha = \sinh\alpha$ |
| | $S^{1,1} \subset \mathbf{R}^{2,1}$ | 负常曲率(类时) | $\Delta\alpha = \sin\alpha$ |
| $\mathbf{R}^{1,1}$ | $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ | 负常曲率 | $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} = \sin\alpha$ |
| | $H^2 \subset \mathbf{R}^{2,1}$ | 正常曲率(类空) | $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} = \sin\alpha$ |
| | $S^{1,1} \subset \mathbf{R}^{2,1}$ | 正常曲率(类时) | $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} = \sinh\alpha$<br>$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} = \cosh\alpha$<br>$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} = e^\alpha$ |

从这个结果可见,构作各种类型的规范化的调和映照和构作各种类型的常曲率曲面的 Chebyshev 标架完全等价. 从而有如下定理成立[46—48]:

**定理 5.2**　如果知道 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^{1,1}$ 到各种 2 维"球面"的一个规范化的调和映照,则运用 Darboux 变换可以得到无限系列的同类型的规范化的调和映照. 不但如此,利用 Darboux 变换还可以从 $\mathbf{R}^2 \to H^2(S^{1,1})$ 的规范化调和映照出发构作 $\mathbf{R}^2$ 到 $S^{1,1}(H^2)$的规范化的调和映照.

**注 5.1**　对于 $\mathbf{R}^3$ 的常平均曲率曲面,有一个著名的定理:常平均曲率

曲面的 Gauss 映照为调和映照[69]. 事实上,它可以作为现在的定理 5.1 的推论. 例如对 $\mathbf{R}^3$ 中的正常曲率 (= 1) 的曲面,它所相应的常平均曲率曲面为(见 § 4.5):

$$\omega^{*1} = \omega^1 \pm \omega_1^3, \quad \omega^{*2} = \omega^2 \pm \omega_2^3,$$

即

$$\omega^{*1} = \left(\cosh\frac{\alpha}{2} \pm \sinh\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}u,$$

$$\omega^{*2} = \left(\cosh\frac{\alpha}{2} \pm \sinh\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}v.$$

它的第一基本形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^{*2} &= \left(\cosh\frac{\alpha}{2} \pm \sinh\frac{\alpha}{2}\right)^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)\\ &= \mathrm{e}^{\pm\alpha}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),\end{aligned}$$

因而 Chebyshev 坐标也是等温参数,即利用 Chebyshev 坐标可以得到常平均曲率曲面和欧氏平面的一个共形对应,由于共形对应保持调和映照的性质,所以有上述结论.

**注 5.2** 可以证明,对于 $\mathbf{R}^{2,1}$ 中类空和类时的常平均曲率曲面,也有注 5.1 类似的结论. 在 § 4.5 中已知道,类空和类时的常平均曲率曲面分别是类空负常曲率曲面和类时正常曲率曲面的平行曲面,不妨设 Gauss 曲率为 −1 或 +1,因而有下式成立:

$$\omega^{*1} = \omega^1 \pm \omega_1^3, \quad \omega^{*2} = \omega^2 \pm \omega_2^3.$$

在类空的情形:

$$\omega^{*1} = \left(\cosh\frac{\alpha}{2} \pm \sinh\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}u,$$

$$\omega^{*2} = \left(\sinh\frac{\alpha}{2} \pm \cosh\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}v,$$

从而

$$\mathrm{d}s^{*2} = (\omega^{*1})^2 + (\omega^{*2})^2 = \mathrm{e}^{\pm\alpha}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),$$

$(u, v)$为等温参数.

在类时的情形:

$$\omega^{*1} = \left(\cosh\frac{\alpha}{2} \pm \sinh\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}u,$$

$$\omega^{*2} = \left(\sinh\frac{\alpha}{2} \pm \cosh\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}v,$$

从而
$$\mathrm{d}s^{*2} = (\omega^{*1})^2 - (\omega^{*2})^2 = \mathrm{e}^{\pm\alpha}(\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2),$$

$(u, v)$是类时曲面的等温参数.

根据上面的定理,即可知道常平均曲率曲面的 Gauss 映照是调和映照,$(u, v)$平面到曲面的 Chebyshev 映照是共形映照.

**注 5.3** 以 Minkowski 平面 $\mathbf{R}^{1,1}$ 到一般黎曼流形的调和映照的研究,是由文献[29]中最早开展的,该文中证明了当目标流形是完备的黎曼流形时,调和映照的 Cauchy 问题解必然整体地存在(即在整个 $\mathbf{R}^{1,1}$ 上存在). 在文献[30]中分析了目标流形为 $S^{1,1}$ 的情况,指出 Cauchy 问题的整体解有时存在,有时不存在.

## §5.3 $\mathbf{R}^{1,1}$到$U(N)$的调和映照

### 5.3.1 群$U(N)$的黎曼度量

现在讨论以群$U(N)$为目标流形的调和映照. $U(N)$群由 $N\times N$ 酉阵所构成,其中元素 $g$ 为满足$gg^* = I$的$N\times N$阵. 在$U(N)$上,可以引入一个黎曼度量

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{tr}(\mathrm{d}gg^{-1}\,\mathrm{d}gg^{-1}) \\ &= -\mathrm{tr}(\mathrm{d}gg^*\,\mathrm{d}gg^*).\end{aligned} \tag{5.35}$$

这里 $g$ 是群的一般元素,$\mathrm{d}g$ 是它的微分,矩阵的迹(tr)就是它的对角元素之和. 这个度量在群的左推动和右推动下是不变的,即在变换 $g\to g_1 = ag$ 和 $g\to g_2 = ga$ 下,$\mathrm{d}s^2$ 是不变的,这里 $a$ 是群中任意一个确定的元素. 事实上,由

$$\mathrm{d}g_1 g_1^{-1} = a\,\mathrm{d}gg^{-1}a^{-1}$$

和
$$\mathrm{d}g_2 g_2^{-1} = \mathrm{d}gg^{-1}$$

就可知

$$\mathrm{tr}(\mathrm{d}gg^{-1}\,\mathrm{d}gg^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{d}g_1g_1^{-1}\,\mathrm{d}g_1g_1^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{d}g_2g_2^{-1}\,\mathrm{d}g_2g_2^{-1}).$$

下面证明 $\mathrm{d}s^2$ 确是一个黎曼度量,也即(5.35)式是正定的二次微分形式.由于$U(N)$是一个微分流形,我们将 $g$ 用局部坐标(即群的参数)$u^\alpha$ 来表示

$$g = g(u^\alpha) \quad (\alpha = 1,\,2,\,\cdots,\,r),$$

$r = N^2$ 为$U(N)$群的维数.这时,

$$\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha, \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial g}{\partial u^\alpha}g^*\ \frac{\partial g}{\partial u^\beta}g^*\right)\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta\\ &= g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta,\end{aligned}$$

而

$$g_{\alpha\beta} = -\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial g}{\partial u^\alpha}g^*\ \frac{\partial g}{\partial u^\beta}g^*\right). \tag{5.37}$$

现在说明 $\mathrm{d}s^2$ 是正定的.任取一组不全为0的实数 $\xi^\alpha$,令

$$Q = \frac{\partial g}{\partial u^\alpha}g^*\,\xi^\alpha.$$

取 $\mathrm{d}u^\alpha$ 为 $\xi^\alpha$,代入 $\mathrm{d}s^2$ 中,得到 $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = -\mathrm{tr}(Q^2)$.另一方面,由于 $gg^* = I$,微分后得

$$\frac{\partial g}{\partial u^\alpha}g^* + g\,\frac{\partial g^*}{\partial u^\alpha} = 0,$$

因而有 $Q + Q^* = 0$.这样就有

$$-\,\mathrm{tr}\,(Q^2) = \mathrm{tr}\,(QQ^*) \geqslant 0.$$

又显见 $\mathrm{tr}\,(QQ^*) = 0$ 只能在 $Q = 0$ 时成立,即只有在 $\xi^\alpha = 0$ 时成立,因而 $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geqslant 0$,而等号只在 $\xi^\alpha = 0$ 时成立.这样就证明了$\mathrm{d}s^2$确是一个黎曼度量.

### 5.3.2 $\mathbf{R}^{1,1}$到$U(N)$的调和映照[36]

设 $x$, $t$ 是$\mathbf{R}^{1,1}$的正交坐标,取$\xi = x + t$, $\eta = x - t$, $(\xi,\,\eta)$ 是$\mathbf{R}^{1,1}$的

特征坐标(光锥坐标). 在这一坐标下,$\mathbf{R}^{1,1}$的度量 $\mathrm{d}s^2$ 为二次型 $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$,而 $\mathbf{R}^{1,1}$到 $U(N)$的调和映照 $g(\xi,\ \eta)$的作用量则是

$$\begin{aligned}\mathscr{A}[g] &= \int g_{\alpha\beta}u_\xi^\alpha u_\eta^\beta \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= -\int \mathrm{tr}\left(\frac{\partial g}{\partial u^\alpha}g^* \ \frac{\partial g}{\partial u^\beta}g^*\right)u_\xi^\alpha u_\eta^\beta \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= -\int \mathrm{tr}\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}g^* \ \frac{\partial g}{\partial \eta}g^*\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned} \tag{5.38}$$

再引入记号

$$A = g_\eta g^*\ , \quad B = g_\xi g^*\ , \tag{5.39}$$

$A$, $B$ 取值于群 $U(N)$的 Lie 代数 $u(N)$.

现在要作 $\mathscr{A}[g]$的 Euler 方程. 我们运用变分法的一般程序来进行,作

$$\mathscr{A}_\Omega[g] = -\int_\Omega \mathrm{tr}\,(g_\xi g^*\ g_\eta g^*)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

式中 $\Omega$ 是某一有界区域. 设 $g$ 还依赖一个参数 $\tau$,即 $g = g(\tau,\ \xi,\ \eta)$, 而且 $g(0,\ \xi,\ \eta) = g$. 又令 $\left.\frac{\partial g}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = h$, 假设在 $\Omega$ 的边界上$g(\tau,\ \xi,\ \eta)$不依赖于 $\tau$,则 $h\,|_{\partial\Omega} = 0$. 这样就有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}_\Omega[g]}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = -\int_\Omega \mathrm{tr}\,(h_\xi g^* A + g_\xi h^* A + Bh_\eta g^* + Bg_\eta h^*)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

对第一项和第三项作分部积分,利用边界条件,得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}_\Omega[g]}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = -\int_\Omega \mathrm{tr}\,(&-hg^* A_\xi - hg_\xi^* A + g_\xi h^* A \\ &- B_\eta hg^* - Bhg_\eta^* + Bg_\eta h^*)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

又从 $gg^* = I$ 和 $g^* g = I$ 微分而得知 $hg^* = -gh^*$ 和 $h^* g = -g^* h$, 所以

$$\begin{aligned} g_\xi h^* A &= g_\xi h^* gg^* g_\eta g^* = -g_\xi g^* hg^* g_\eta g^*\ , \\ Bg_\eta h^* &= g_\xi g^* g_\eta h^* gg^* = -g_\xi g^* g_\eta g^* hg^*\ , \\ hg_\xi^* A &= hg_\xi^* gg^* g_\eta g^* = -hg^* g_\xi g^* g_\eta g^*\ , \\ Bhg_\eta^* &= g_\xi g^* hg^* gg_\eta^* = -g_\xi g^* hg^* g_\eta g^*\ . \end{aligned}$$

代入上式,并利用 $\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_n)=\mathrm{tr}(A_nA_1A_2\cdots A_{n-1})$ 这个性质,就得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\mathscr{A}_\Omega[g]}{\mathrm{d}\,\tau}\right|_{\tau=0}=\int_\Omega \mathrm{tr}\,(hg^*\ (A_\xi+B_\eta))\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=0.$$

由于 $hg^*$ 可以为 Lie 代数 $u(N)$中的任意阵, $A_\xi+B_\eta$ 也取值于 Lie 代数 $u(N)$,于是得到 Euler 方程

$$A_\xi+B_\eta=0. \tag{5.40}$$

经直接计算可知(5.39)式所定义的 $A$, $B$ 满足

$$A_\xi-B_\eta+[A,\ B]=0. \tag{5.41}$$

**注 5.4** (5.39)式就是 $g_\xi=Bg$, $g_\eta=Ag$, 易见(5.41)式是(5.39)式的可积条件. 因而在 $\mathbf{R}^{1,1}$ 上(或某一单连通的区域中),由满足(5.41)式的 $A$, $B$ 可唯一确定 $g(\xi,\ \eta)$(除右乘 $U(N)$中任一固定元素外). 所以在研究调和映照 $g(\xi,\ \eta)$时,实际上可以把 $A$, $B$ 作为未知函数,只需研究以 $A$, $B$ 为未知函数的偏微分方程(5.40)式和(5.41)式即可, $A$, $B$ 称为调和映照的势.

如同以往处理许多非线性偏微分方程组一样,在处理(5.40)式和(5.41)式时,首先需要求出它们的带谱参数的 Lax 对[85]. 注意到

$$\Phi_\eta=\lambda A\Phi,\quad \Phi_\xi=\lambda(2\lambda-1)^{-1}B\Phi \tag{5.42}$$

的可积条件为

$$\lambda A_\xi-\lambda(2\lambda-1)^{-1}B_\eta+\lambda^2(2\lambda-1)^{-1}[A,\ B]=0,$$

这就是

$$\lambda^2(A_\xi-B_\eta+[A,\ B])+(\lambda^2-\lambda)(A_\xi+B_\eta)=0.$$

要使上式对任何 $\lambda$ 成立,就推出(5.40)式和(5.41)式.

因而得出如下命题:

**命题 5.1** 偏微分方程(5.40)式和(5.41)式容有 Lax 对(5.42)式.

Lax 对的非异的 $N\times N$ 阵解 $\Phi(\lambda)$称为基本解,$\Phi(\lambda)$由它在某一点,例如(0, 0)的值所完全确定. 如果规定在该点 $\Phi(\lambda)|_0\in U(N)$, 则在 $\lambda$ 为实数时, $\Phi(\lambda)\in U(N)$, 以后就作此约定. $\Phi(1)$及 $\Phi(1)$右乘以 $U(N)$中一固定元素则为调和映照,即

$$g=\Phi(1)\quad 或\quad \Phi(1)K,$$

这里 $K$ 是 $U(N)$ 中一个常值非退化阵.

**注 5.5** 也可把 $U(N)$ 改为任何一个由方阵所形成的 Lie 群 $G$,把(5.40)式和(5.41)式作为调和映照的微分方程,但应以

$$A = g_\eta g^{-1}, \quad B = g_\xi g^{-1}$$

代替(5.39)式,这时(5.42)式仍然是这组方程的 Lax 对.

现在利用 Darboux 变换来制作(5.40)式和(5.41)式的精确解[36].为此,如第1章所叙述的,应由它们的一个已知解作为出发点.

首先讨论群 $G$ 是实(或复)的完全线性群 $GL(N, \mathbf{R})$(或$GL(N, \mathbf{C})$)的情形,它不是紧致群,在其上不存在群不变的黎曼度量(但可以有非正定的度量).设 $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$为实值(或复值)的 $N\times N$ 阵函数,$\Phi(\xi, \eta, \lambda)$满足 $\det\Phi\neq 0$, 且 $A$, $B$, $\Phi$ 是(5.40)式~(5.42)式的一组解.以下作形为

$$D(\lambda) = I-\lambda S \tag{5.43}$$

的 Darboux 阵 $D$,并且要求

$$\Phi_1 = D(\lambda)\Phi \tag{5.44}$$

连同适当的 $A_1$, $B_1$,可使(5.40)式、(5.41)式成立,也即要求 $\Phi_1$, $A_1$, $B_1$ 满足

$$\begin{aligned} \Phi_{1\eta} &= \lambda A_1\Phi_1, \\ \Phi_{1\xi} &= \lambda(2\lambda-1)^{-1}B_1\Phi_1. \end{aligned} \tag{5.42$'$}$$

将(5.44)式代入上式,利用(5.42)式,就有

$$A_1 = A-S_\eta, \quad B_1 = B+S_\xi \tag{5.45}$$

和

$$S_\eta S = AS-SA, \quad S_\xi S-2S_\xi = SB-BS. \tag{5.46}$$

因此,只要作出(5.46)式的非常值的解 $S(\xi, \eta)$,利用(5.45)式作出 $A_1$, $B_1$,且用(5.43)式、(5.44)式来构作 $\Phi_1$,则 $\Phi_1$ 就满足(5.42′)式,因而 $A_1$, $B_1$ 满足(5.40)式、(5.41)式,也就是说,$A_1$, $B_1$ 是一个新解.

下面来作出方程组(5.46)式的解 $S$ 的显式表达式:

任取不全相等的常数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N\left(\lambda_\alpha\neq 0, \dfrac{1}{2}, 1;\ \alpha=1, 2, \cdots, N\right)$,又任取常数列向量 $l_1, \cdots, l_N$ 使 $N\times N$ 阵

$$H = [\Phi(\lambda_1)l_1, \cdots, \Phi(\lambda_N)l_N] \tag{5.47}$$

为非退化的.($H$ 中的列 $\Phi(\lambda_\alpha)l_\alpha$ 就是 Lax 对在 $\lambda = \lambda_\alpha$ 时的列向量解.)记 $\Lambda$ 为对角阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix}, \tag{5.48}$$

则有如下定理:

**定理 5.3** 矩阵

$$S = H\Lambda^{-1}H^{-1} \tag{5.49}$$

满足方程(5.46)式.

**证明** $h_\alpha = \Phi(\lambda_\alpha)l_\alpha$ 是(5.42)式当 $\lambda = \lambda_\alpha$ 时的一个列向量解,即

$$h_{\alpha\eta} = \lambda_\alpha A h_\alpha, \quad h_{\alpha\xi} = \lambda_\alpha(2\lambda_\alpha - 1)^{-1}Bh_\alpha, \tag{5.50}$$

$$(\alpha = 1, 2, \cdots, N),$$

从而得到

$$H_\eta = AH\Lambda, \quad H_\xi = BH\Lambda(2\Lambda - 1)^{-1},$$

因而

$$S_\eta = AH\Lambda\Lambda^{-1}H^{-1} - H\Lambda^{-1}H^{-1}AH\Lambda H^{-1} = A - SAS^{-1},$$

这就是(5.46)式的第一式,而

$$S_\xi = BH\Lambda(2\Lambda - 1)^{-1}\Lambda^{-1}H^{-1} - H\Lambda^{-1}H^{-1}BH\Lambda(2\Lambda - 1)^{-1}H^{-1}$$

$$= BH(2\Lambda - 1)^{-1}H^{-1} - SBH\Lambda(2\Lambda - 1)^{-1}H^{-1},$$

代入(5.46)式的第二式,易知它是满足的. ■

综上所述,有如下定理:

**定理 5.4** 设$(A, B, \Phi)$是(5.40)式~(5.42)式的一个解,又 $S$ 由(5.49)式定义,则由(5.45)式和(5.44)式所定义的$(A_1, B_1, \Phi_1)$也是这组方程的一个解.

和第 1 章一样,所有可对角化的 $S$ 均可由 (5.49) 式给出.

(5.49)式、(5.43)式、(5.44)式和(5.45)式确定了 Darboux 变换

$$(A,\ B,\ \Phi) \to (A_1,\ B_1,\ \Phi_1),$$

其算法是纯代数的,新的调和映照是 $\Phi_1(1)$右乘适当的常数阵,也是用代数方法决定的.

在这个构作中, $\det H \neq 0$ 是一个不一定能整体地满足的条件,这就是说,如果种子解$(A,\ B,\ \Phi)$定义于 $\mathbf{R}^{1,1}$(或某一单连通区域 $\Omega$),我们不能保证 $A_1,\ B_1,\ \Phi_1$ 能在 $\mathbf{R}^{1,1}$(或 $\Omega$)上有整体的定义. 因而我们要问,在什么条件下 Darboux 变换能够得出整体解? 另一问题是:如果 $G$ 是一个子群,$A,\ B$ 取值于$G$ 的 Lie 代数 $G'$,试问如何构作 $A_1,\ B_1$ 使得它们能够仍然取值于 $G'$呢? 这是两个相互联系的问题. 在 $G = U(N)$ 时,我们在下面对这两个问题给出回答.

重复一下,$U(N)$群由满足 $g^* = g^{-1}$ 的所有的 $N\times N$ 阵构成. 一个矩阵 $A$ 属于$U(N)$的 Lie 代数 $u(N)$的充要条件是

$$A^* + A = 0. \tag{5.51}$$

现设$(A,\ B,\ \Phi)$为(5.40)式~(5.42)式的一组解,定义域为 $\mathbf{R}^{1,1}$, $A,\ B \in u(N)$ (如果它们的定义域是 $\mathbf{R}^{1,1}$中的单连通区域 $\Omega$,则一切叙述均有效,这里不再重复). 我们照样可以按(5.45)式和(5.44)式作 Darboux 变换,但为使 $A_1,\ B_1 \in u(N)$, 则需要

$$(S+S^*)_\eta = 0, \quad (S+S^*)_\xi = 0 \tag{5.52}$$

成立. 因而重要的是构作 $S$ 使(5.52)式成立. 这种特殊的 $S$ 可以通过下面的方法得到.

取 $\lambda^0$ 为一非实的复数,选 $\lambda_\alpha$ 使得

$$\lambda_\alpha = \lambda^0 \quad \text{或} \quad \bar{\lambda}^0 \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \cdots,\ N), \tag{5.53}$$

又选 $l_\alpha$,使得在某一点(例如 $\xi = \eta = 0$ )满足

$$h_\alpha^* h_\beta = 0 \quad (\text{若 } \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta), \tag{5.54}$$

并且 $h_\alpha$ 是线性无关的. 下面要证明:对这样选取的 $\lambda_\alpha,\ l_\alpha$ 所作出的 $S$ 必满足(5.52)式.

首先证明:若(5.54)式在一点成立,那么它在 $\mathbf{R}^{1,1}$处处成立. 事实上,由(5.50)式可得

$$(h_\alpha^* h_\beta)_\eta = \bar{\lambda}_\alpha h_\alpha^* A^* h_\beta + \lambda_\beta h_\alpha^* A h_\beta,$$

$$(h_\alpha^* h_\beta)_\xi = \bar{\lambda}_\alpha (2\bar{\lambda}_\alpha - 1)^{-1} h_\alpha^* B^* h_\beta + \lambda_\beta (2\lambda_\beta - 1)^{-1} h_\alpha^* B h_\beta.$$

在 $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ 时，$\bar{\lambda}_\alpha = \lambda_\beta$，因而

$$(h_\alpha^* h_\beta)_\eta = (h_\alpha^* h_\beta)_\xi = 0,$$

这就说明了(5.54)式在一点成立就在处处成立.

其次，可以看到，对应于同一个 $\lambda_\alpha = \lambda^0$(或$\bar{\lambda}^0$)，$h_\alpha$ 的集合如在一点线性无关，则在点点线性无关. 这是因为方程(5.50)式是线性的，如果一组解在某点线性相关，它们必在处处线性相关. 在此选 $h_\alpha$ 的初始值，使它们满足(5.54)式且线性无关. 由于对同一个 $\lambda_\alpha$ 的 $h_\alpha$ 线性无关，又由(5.54)式可知，所有这些 $h_\alpha$ 也线性无关.

由此可得 $\det H \neq 0$ 处处成立，所以所得的解是 $\mathbf{R}^{1,1}$ 上的整体解.

再由 $S$ 的定义(5.49)式可知

$$SH - H\Lambda^{-1} = 0,$$

这就是

$$Sh_\beta - \lambda_\beta^{-1} h_\beta = 0,$$

同时也有

$$h_\beta^* S^* - \bar{\lambda}_\beta^{-1} h_\beta^* = 0,$$

因而有

$$h_\beta^* (S^* + S) h_\gamma = (\bar{\lambda}_\beta^{-1} + \lambda_\gamma^{-1}) h_\beta^* h_\gamma.$$

当 $\lambda_\beta \neq \lambda_\gamma$ 时，此式右端为 0. 当 $\lambda_\beta = \lambda_\gamma = \lambda^0$(或$\bar{\lambda}^0$) 时，上式右端为 $\left(\frac{1}{\lambda^0} + \frac{1}{\bar{\lambda}^0}\right) h_\beta^* h_\gamma$，因此

$$h_\beta^* (S^* + S) h_\gamma = h_\beta^* \left(\frac{1}{\lambda^0} + \frac{1}{\bar{\lambda}^0}\right) I h_\gamma.$$

由于 $h_\gamma (\gamma = 1, 2, \cdots, N)$ 为线性无关的，所以有

$$S^* + S = \left(\frac{1}{\lambda^0} + \frac{1}{\bar{\lambda}^0}\right) I. \tag{5.55}$$

由此知道(5.52)式成立，$A_1$，$B_1$ 取值于 $u(N)$. 因而有如下定理：

**定理 5.5** 设 $G = U(N)$，$A$，$B \in u(N)$，又设$(A, B, \Phi)$是(5.40)式～

(5.42)式在 $\mathbf{R}^{1,1}$ 上的一个解,$S$ 是由(5.49)式所定义,但其中 $\lambda_\alpha$ 和 $l_\alpha$ 的取法满足方程(5.53)式、(5.54)式和 $\det H \neq 0$,则由(5.45)式和(5.44)式所定义的$(A_1, B_1, \Phi_1)$也是这组方程在 $\mathbf{R}^{1,1}$ 上的整体解,且 $A_1, B_1 \in u(N)$.

群 $G$ 为 $SU(N)$时,依定义 $g \in SU(N)$ 的充要条件是 $g \in U(N)$ 且 $\det g = 1$. $SU(N)$的 Lie 代数 $su(N)$的元素 $A$ 由 $A \in u(N)$ 且 $\operatorname{tr} A = 0$ 所定义.

上面的定理5.5对 $SU(N)$仍然成立,这时应有 $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$, $\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr} B_1 = 0$. 事实上,利用(5.46)式,(5.45)式还可写成为

$$\begin{aligned} A_1 &= SAS^{-1}, \\ B_1 &= (S-2I)B(S-2I)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.56}$$

在此我们注意到

$$-S+2I = -H(\Lambda^{-1}-2I)H^{-1},$$

又 $\lambda^0$ 为非实的,所以 $2I-S$ 非异.

由于已有 $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$,从(5.56)式就得出

$$\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr} B_1 = 0.$$

**注5.6**　令 $\lambda = 1$, $\Phi(1)$满足

$$\Phi(1)_\eta = A\Phi(1), \quad \Phi(1)_\xi = B\Phi(1),$$

同(5.39)式相比较,可知调和映照 $g$ 就是

$$g = \Phi(1)K, \tag{5.57}$$

式中 $K$ 是适当的右乘因子以保证 $g \in U(N)$. 这种调和映照的构作在文献[6]中也曾研究过,但没有用 Darboux 变换,其结果没有这里的具体. 特别,我们在这里指出:利用纯代数的算法可以得到新解的显式表达式.

### 5.3.3　孤立子解[36]

以平凡解为种子解,按上面的方法作 Darboux 变换,可以得到单孤立子解和多孤立子解,并且这种作法用代数算法就能完成. 这对一切的 $U(N)$都适用,但为简洁计,在此取 $N=2$ 的情形,考虑 $\mathbf{R}^{1,1} \to SU(2)$的调和映照.

$SU(2)$的元素可写为

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\gamma} \end{bmatrix}, \tag{5.58}$$

这里$\beta$, $\gamma$是复数,并满足$\gamma\bar{\gamma}+\beta\bar{\beta}=1$. 取$A$, $B$为$su(2)$中的非零常值元素,而且$[A, B]=0$. 这样,调和映照方程(5.40)式和(5.41)式都能满足. 不妨记

$$A=\begin{bmatrix} \mathrm{i}p & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}p \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \mathrm{i}q & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}q \end{bmatrix}, \tag{5.59}$$

式中$p$, $q$为非0实数. 这时求解$\mathrm{d}g_0=(A\mathrm{d}\eta+B\mathrm{d}\xi)g_0$, 可以取

$$g_0=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\eta+q\xi)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\eta+q\xi)} \end{bmatrix} \tag{5.60}$$

是一个调和映照,$\Phi_0(\lambda)$为

$$\Phi_0(\lambda)=\begin{bmatrix} l(\lambda) & 0 \\ 0 & l^{-1}(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{5.61}$$

其中

$$l(\lambda)=\exp\left(\mathrm{i}\lambda p\eta+\frac{\mathrm{i}\lambda}{2\lambda-1}q\xi\right), \tag{5.62}$$

$g_0$, $A$, $B$, $\Phi_0$ 就是作 Darboux 变换的种子解.

选$\lambda_1=\lambda_0$, $\lambda_2=\bar{\lambda}_0$, 阵$H$具有形式

$$H=[h_1, h_2]=\begin{bmatrix} l(\lambda_0) & bl(\bar{\lambda}_0) \\ al^{-1}(\lambda_0) & l^{-1}(\bar{\lambda}_0) \end{bmatrix}, \tag{5.63}$$

这时

$$h_2^* h_1=\bar{b}\,\overline{l(\bar{\lambda}_0)}l(\lambda_0)+a\,\overline{l^{-1}(\bar{\lambda}_0)}l^{-1}(\lambda_0).$$

由于

$$\overline{l(\bar{\lambda}_0)}=\overline{\exp\left(\mathrm{i}\,\bar{\lambda}_0 p\eta+\frac{\mathrm{i}\,\bar{\lambda}_0}{2\,\bar{\lambda}_0-1}q\xi\right)}=l^{-1}(\lambda_0),$$

$$l(\lambda_0)=\overline{l^{-1}(\bar{\lambda}_0)},$$

所以为使$h_2^* h_1=0$成立,其条件为$\bar{b}=-a$.

经过计算,得到

$$\det H = \mathrm{e}^{r} + |a|^{2}\mathrm{e}^{-r} > 0, \tag{5.64}$$

$$S = H\Lambda^{-1}H^{-1}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^{r} + |a|^{2}\mathrm{e}^{-r}}\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}^{r}}{\lambda_0} + \dfrac{\mathrm{e}^{-r}}{\bar{\lambda}_0}|a|^{2} & \left(\dfrac{1}{\lambda_0} - \dfrac{1}{\bar{\lambda}_0}\right)\bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} \\ \left(\dfrac{1}{\lambda_0} - \dfrac{1}{\bar{\lambda}_0}\right)a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s} & \dfrac{\mathrm{e}^{r}}{\bar{\lambda}_0} + \dfrac{\mathrm{e}^{-r}}{\lambda_0}|a|^{2} \end{pmatrix}, \tag{5.65}$$

式中

$$r = \mathrm{i}(\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)p\eta + \mathrm{i}\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_0 - 1} - \frac{\bar{\lambda}_0}{2\bar{\lambda}_0 - 1}\right)q\xi \tag{5.66}$$

和

$$s = (\lambda_0 + \bar{\lambda}_0)p\eta + \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_0 - 1} + \frac{\bar{\lambda}_0}{2\bar{\lambda}_0 - 1}\right)q\xi \tag{5.67}$$

为实值线性函数. 新的基本解和新的调和映照分别为

$$\Phi_1(\lambda) = (I - \lambda S)\Phi(\lambda),$$

$$g_1 = \Phi_1(1)\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|. \tag{5.68}$$

上式右乘的常数因子 $\left|\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|$ 是为保证 $g_1 \in SU(2)$ 所需要的.

**注 5.7**　如果以 $r - \ln|a|$, $s + \mathrm{i}\ln(a/|a|)$ 代替 $r$, $s$,并仍然记它们为 $r$, $s$,则 $S$ 的表达式中的 $a$ 可改写为 1,即可以把 $a$ 吸收到 $r$, $s$ 中.

把 $g_1$ 写成为

$$g_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ -\bar{\beta}_1 & \bar{\gamma}_1 \end{pmatrix}, \tag{5.69}$$

而

$$\gamma_1 = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{\lambda_0}\right)\mathrm{e}^{r} + \left(1 - \dfrac{1}{\bar{\lambda}_0}\right)\mathrm{e}^{-r}}{\mathrm{e}^{r} + \mathrm{e}^{-r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\eta + q\xi)}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|,$$

$$\beta_1 = -\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^{r} + \mathrm{e}^{-r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s - p\eta - q\xi)}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|. \tag{5.70}$$

如记

$$\beta_1 = \rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \quad \gamma_1 = \sigma_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_1},$$

$\rho_1 > 0$, $\sigma_1 > 0$, $\theta_1$, $\tau_1$ 为实值,则

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}{\lambda_0(\lambda_0 - 1)}\right| \operatorname{sech} r, \\ \sigma_1 &= (1 - \rho_1^2)^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.71}$$

$\rho_1$ 和 $\sigma_1$ 关于 $r$ 的图形为图 5.1,所以具有孤立子形状.

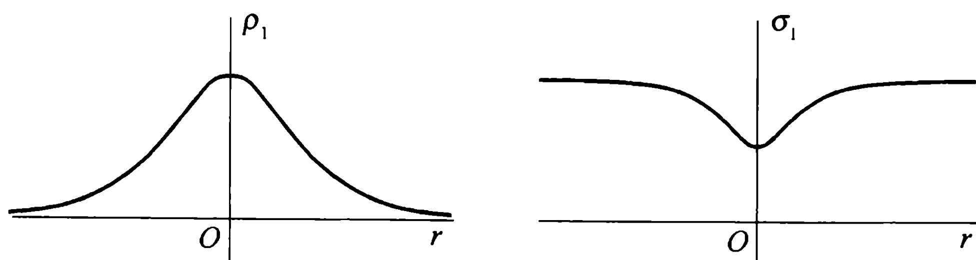



**图　5.1**

如所知,$SU(2)$是一个 3 维流形,实际上可用 $\mathbf{R}^4$ 中的 3 维球面 $S^3$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

来刻画.$(x_1, x_2, x_3, x_4)$和元素 $\begin{pmatrix}\gamma & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\gamma}\end{pmatrix}$ 的关系为

$$\gamma = x_1 + \mathrm{i}x_2, \quad \beta = x_3 + \mathrm{i}x_4. \tag{5.72}$$

由(5.69)式可见到,除去 $r$ 仅仅依赖于 $x$ 或 $t$ 的情形外,当 $t$ 固定,$x$ 变动时,以及 $x$ 固定,$t$ 变动时,映照的象均螺旋地逼近大圆 $x_3 = x_4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$, 也即以此两个大圆为极限环.

**注 5.8**　可以验证,对于 $SU(2)$,不变度量就是标准球面 $S^3$ 的度量,所以到 $SU(2)$的调和映照等同于到标准球面 $S^3$ 的调和映照.

## 5.3.4　多孤立子解[36]

运用多次的 Darboux 变换,可以得到多孤立子解.

取 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}$为 $k$ 个非实的复数,假设它们互不相等,并且满足

(i) $|2\lambda_l - 1|$ $(l = 0, 1, \cdots, k-1)$ 互不相同;

(ii) $(\lambda_l - \bar{\lambda}_l)p \pm \left(\dfrac{\lambda_l}{2\lambda_l - 1} - \dfrac{\bar{\lambda}_l}{2\bar{\lambda}_l - 1}\right)q \neq 0$,

这里 $p$, $q$ 就是种子解

$$g_0 = \begin{pmatrix} e^{i(p\eta+q\xi)} & 0 \\ 0 & e^{-i(p\eta+q\xi)} \end{pmatrix} \tag{5.73}$$

中出现的常数. 令

$$\begin{aligned} r_l &= i\left\{(\lambda_l - \bar{\lambda}_l)p\eta + \left(\frac{\lambda_l}{2\lambda_l - 1} - \frac{\bar{\lambda}_l}{2\bar{\lambda}_l - 1}\right)q\xi\right\}, \\ s_l &= (\lambda_l + \bar{\lambda}_l)p\eta + \left(\frac{\lambda_l}{2\lambda_l - 1} + \frac{\bar{\lambda}_l}{2\bar{\lambda}_l - 1}\right)q\xi \\ &\quad (l = 0, 1, 2, \cdots, k-1). \end{aligned} \tag{5.74}$$

这是一组实的关于 $\xi$, $\eta$ 的线性函数. 容易验证 $\frac{r_l}{r_j}$ $(l \neq j)$ 不是常数的充要条件就是(i),而(ii)则表示 $r_l$ 确实是依赖 $x$ 和 $t$ 的. 另外, $r_0$, $s_0$ 就是讨论单孤立子时所定义的 $r$, $s$.

由于已有 $g_0$ 和 $\Phi_0$,于是可以用递归的方法作出

$$\Phi_j(\lambda) = (I - \lambda S_{j-1}) \cdots (I - \lambda S_0)\Phi_0(\lambda), \tag{5.75}$$

$$g_j = (I - S_{j-1}) \cdots (I - S_0) g_0 \left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right| \cdots \left|\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_{j-1} - 1}\right| \tag{5.76}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, k),$$

$S_0$ 就是作单孤立子时所定义的 $S$; $S_1$, $S_2$, $\cdots$, $S_{k-1}$ 分别是依 $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\cdots$, $\Phi_{k-1}$ 按(5.49)式所作的阵.

根据 $S_0$ 的表达式,可见

$$\lim_{r_0 \to \pm\infty} S_0 = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_0 \end{pmatrix}, \tag{5.77}$$

这里

$$\mu_0 = \begin{cases} 1/\lambda_0, & 当\ r_0 \to +\infty; \\ 1/\bar{\lambda}_0, & 当\ r_0 \to -\infty. \end{cases} \tag{5.78}$$

现在需要证明如下引理:

**引理 5.1**　当 $r_l$ 有界, $t \to +\infty$ 时

$$\lim_{t\to+\infty} S_l \to \begin{pmatrix} \mu_l & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_l \end{pmatrix} \tag{5.79}$$

$(\mu_l = 1/\lambda_l$ 或 $1/\bar{\lambda}_l$; $l = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$.

**证明** 用递归证法:设上式对 $l = 0, 1, 2, \cdots, i-1$ 成立,考察 $l = i$ 的情形:

由于 $r_i$ 有界,故当 $t\to+\infty$ 时,$r_0, \cdots, r_{i-1}\to\pm\infty$,这时,已有

$$\Phi_i \sim \begin{pmatrix} \mathscr{A}(\lambda)l(\lambda) & 0 \\ 0 & \tilde{\mathscr{A}}(\lambda)l^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{5.80}$$

式中"～"表示渐近形态,而

$$\mathscr{A}(\lambda) = \prod_{h=0}^{i-1}(1-\lambda\mu_h), \quad \tilde{\mathscr{A}}(\lambda) = \prod_{h=0}^{i-1}(1-\lambda\bar{\mu}_h), \tag{5.81}$$

且有

$$\overline{\mathscr{A}(\lambda)} = \tilde{\mathscr{A}}(\bar{\lambda}), \tag{5.82}$$

从而

$$H_i \sim \begin{pmatrix} \mathscr{A}(\lambda_i)l(\lambda_i) & b_i\mathscr{A}(\bar{\lambda}_i)l(\bar{\lambda}_i) \\ a_i\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_i)l^{-1}(\lambda_i) & \tilde{\mathscr{A}}(\bar{\lambda}_i)l^{-1}(\bar{\lambda}_i) \end{pmatrix}, \tag{5.83}$$

式中 $b_i = -\bar{a}_i$.

如前,可以把它们吸收到 $r_i$ 和 $s_i$ 中,使得 $a_i = 1$, $b_i = -1$,通过计算可以得到

$$S_i = H_i\Lambda_i^{-1}H_i^{-1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \dfrac{|A(\lambda_i)|^2}{\lambda_i}\mathrm{e}^{r_i} + \dfrac{|A(\bar{\lambda}_i)|^2}{\bar{\lambda}_i}\mathrm{e}^{-r_i} & \left(\dfrac{1}{\lambda_i} - \dfrac{1}{\bar{\lambda}_i}\right)\mathscr{A}(\lambda_i)\mathscr{A}(\bar{\lambda}_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}s_i} \\ \left(\dfrac{1}{\lambda_i} - \dfrac{1}{\bar{\lambda}_i}\right)\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_i)\tilde{\mathscr{A}}(\bar{\lambda}_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s_i} & \dfrac{|A(\lambda_i)|^2}{\bar{\lambda}_i}\mathrm{e}^{r_i} + \dfrac{|A(\bar{\lambda}_i)|^2}{\lambda_i}\mathrm{e}^{-r_i} \end{pmatrix}$$

$$\times[|\mathscr{A}(\lambda_i)|^2\mathrm{e}^{r_i} + |\mathscr{A}(\bar{\lambda}_i)|^2\mathrm{e}^{-r_i}]^{-1}. \tag{5.84}$$

如 $t\to+\infty$, $r_i\to\pm\infty$, 则有下式成立:

$$S_i \sim \begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_i \end{pmatrix}, \quad \mu_i = \frac{1}{\lambda_i} \text{ 或 } \frac{1}{\bar{\lambda}_i}.$$

于是完成了递归的证明. ∎

依假设,当 $t\to+\infty$ 时,$r_{k-1}$ 有界,因而 $r_0$, …, $r_{k-2}\to\pm\infty$, 从而

$$g_k \sim (I-S_{k-1})\begin{pmatrix}1-\mu_{k-2} & \\ & 1-\bar{\mu}_{k-2}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1-\mu_0 & \\ & 1-\bar{\mu}_0\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}e^{i(p\eta+q\xi)} & \\ & e^{-i(p\eta+q\xi)}\end{pmatrix}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\cdots\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}-1}\right|. \tag{5.85}$$

再根据 $S_{k-1}$ 的渐近表示式(5.84)式,就可见到在 $r_{k-1}$ 有界, $t\to+\infty$ 的情况下,$g_k$ 的渐近情况和单孤立子相同.

如果 $t\to+\infty$, $r_0$, …, $r_{k-1}$ 中有一个不趋向于 $\pm\infty$, 比如说 $r_i\not\to\pm\infty$ $(i<k-1)$, 则其余的 $r_j\to\pm\infty$. 依据 Darboux 变换的可换性原理,把相应于 $\lambda_i$ 的 Darboux 阵移到最后,虽然各个因子的表达式应作适当变动,但所得结果仍然是 $g_k$. 从而知道 $t\to+\infty$, 沿着这个 $r_i\not\to\pm\infty$ 的方向,$g_k$ 的渐近情况仍为单孤立子.

在 $t\to-\infty$ 时,可以作同样的工作,得出类似的结果. 此时 $\mu_i$ 的值应该变为复共轭,这就说明所得的单孤立子有"相移". 从而有如下定理[36]:

**定理 5.6**　从平凡解出发,应用 $k$ 次 Darboux 变换,所得到的 $\mathbf{R}^{1,1}$ 到 $U(N)$(或 $SU(N)$)的调和映照的 $k$ 重孤立子解有下述性质:当 $t\to\pm\infty$ 时,渐近解分解为 $k$ 个单孤立子解. 在 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时这 $k$ 个孤立子解依相反的顺序排列,各有其相应的相移.

这样,对于 $\mathbf{R}^{1,1}$ 到 $U(N)$(或 $SU(N)$)的调和映照的多重孤立子解也和 KdV 方程等其他方程一样,表现出的相互作用是弹性散射,所以称它为孤立子解是很恰当的.

## § 5.4　$\mathbf{R}^2$ 到 $U(N)$ 的调和映照[38]

### 5.4.1　$\mathbf{R}^2$ 到 $U(N)$ 的调和映照及其 Darboux 变换

设 $\mathbf{R}^2$ 的笛氏正交坐标为$(x, y)$,则 $\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^2$ 的某一单连通区域 $\Omega$)到 $U(N)$的映照 $\phi(x, y)$的能量为

$$S[\phi] = -\int \mathrm{tr}(\phi_x\phi^{-1}\phi_x\phi^{-1} + \phi_y\phi^{-1}\phi_y\phi^{-1})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5.86}$$

如 $S[\phi]$的 Euler 方程成立,就称 $\phi$ 为 $\mathbf{R}^2$ 到 $U(N)$的调和映照.

引入记号

$$\zeta = x + \mathrm{i}y, \quad \bar{\zeta} = x - \mathrm{i}y \tag{5.87}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{5.88}$$

令

$$A = \phi_{\bar{\zeta}}\phi^{-1},\ B = \phi_\zeta\phi^{-1}. \tag{5.89}$$

与§5.3 中所述相同,如果 $\phi$ 为调和映照,则 $A$, $B$ 应满足微分方程

$$A_\zeta - B_{\bar{\zeta}} + [A, B] = 0, \tag{5.90}$$

$$A_\zeta + B_{\bar{\zeta}} = 0. \tag{5.91}$$

因为 $\phi \in U(N),\ \phi^* = \phi^{-1}$,

$$A^* = \phi^{*-1}\phi^*_\zeta = \phi(\phi^{-1})_\zeta = -\phi\phi^{-1}\phi_\zeta\phi^{-1} = -B,$$

所以关于 $A$, $B$ 的约束条件是

$$A^* = -B. \tag{5.92}$$

相反,如果 $A$, $B$ 满足约束条件(5.92)式以及微分方程(5.90)式、(5.91)式,那么从这一对 $A$, $B$ 出发,由方程

$$\phi_{\bar{\zeta}} = A\phi, \quad \phi_\zeta = B\phi \tag{5.93}$$

可解出 $\phi$,此时 $\phi$ 还满足

$$\begin{aligned}(\phi^*\phi)_\zeta &= \phi^*_\zeta\phi + \phi^*\phi_\zeta = (\phi_{\bar{\zeta}})^*\phi + \phi^*\phi_\zeta = (A\phi)^*\phi + \phi^*B\phi \\ &= \phi^*(A^* + B)\phi = 0.\end{aligned} \tag{5.94}$$

同样有

$$(\phi^*\phi)_{\bar{\zeta}} = 0. \tag{5.95}$$

所以若取初始条件使 $\phi^*\phi = I$ 成立,则此式就在处处成立,因而可以把(5.90)式、(5.91)式、(5.92)式看成是 $\mathbf{R}^2$ 到 $U(N)$的调和映照方程. 除去右乘 $U(N)$中一个固定元素外,它们唯一地确定了 $\mathbf{R}^2$ 到$U(N)$的调和映照.

再引入谱参数 $\lambda$，作 Lax 对

$$\Phi_{\bar{\zeta}} = \lambda A\Phi, \quad \Phi_{\zeta} = \frac{\lambda}{2\lambda - 1}B\Phi, \tag{5.96}$$

其可积条件就是(5.90)式和(5.91)式. $\Phi(\lambda)$在 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时有意义. 设所选取的初始条件为 $\zeta = \bar{\zeta} = 0$, $\Phi \in U(N)$, 那么

$$g = \Phi(1) \tag{5.97}$$

就是一个调和映照. $g$ 除了右乘一个 $U(N)$中的常值阵之外，也是完全确定的. 据文献[74]，$\Phi(\lambda)$称为调和映照 $g$ 的**拓广解**. 此外，还应注意，如果 $|2\lambda - 1| = 1$, 则 $\bar{\lambda} \doteq \frac{\lambda}{2\lambda - 1}$, $\Phi(\lambda)$在 $U(N)$中取值.

关于 $\mathbf{R}^2$ 到 $U(N)$的调和映照，在文献[74]中已有很多叙述，下面主要讨论它们的 Darboux 变换.

和§5.3 中所述相同，可构作 Darboux 阵 $D = I - \lambda S$ 以及作 Darboux 变换

$$(A, B, \Phi) \to (A_1, B_1, \Phi_1), \tag{5.98}$$

这里

$$\Phi_1 = (I - \lambda S)\Phi, \tag{5.99}$$

$$A_1 = A - S_{\bar{\zeta}}, \quad B_1 = B + S_{\zeta}. \tag{5.100}$$

为使$(A_1, B_1, \Phi_1)$满足调和映照的 Lax 对

$$\Phi_{1\bar{\zeta}} = \lambda A_1\Phi_1, \quad \Phi_{1\zeta} = \frac{\lambda}{2\lambda - 1}B_1\Phi_1,$$

$S$ 应满足

$$S_{\bar{\zeta}}S = AS - SA, \quad S_{\zeta}(S - 2I) = SB - BS, \tag{5.101}$$

此外，还应有 $A_1^* = -B_1$ 以及

$$A_1 = SAS^{-1}, \; B_1 = (S - 2I)B(S - 2I)^{-1}. \tag{5.102}$$

和以前的作法一样，取 $N$ 个复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N \left(\neq 0, \frac{1}{2}\right)$, 又取

$$h_\rho = \Phi(\lambda_\rho)l_\rho \quad (\rho = 1, 2, \cdots, N), \tag{5.103}$$

$l_\rho$ 是常列向量，应选取这些 $l_\rho$ 使得

$$H = [h_1, h_2, \cdots, h_N] \tag{5.104}$$

为非异阵,则

$$S = H\Lambda^{-1}H^{-1}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N) \tag{5.105}$$

就能使(5.101)式满足.其证明和 $\mathbf{R}^{1,1}$ 的情形完全一样.

现在要求取到 $\lambda_\rho$ 和 $l_\rho$ 使得 $A_1^* = -B_1$ 成立.为此,取 $\omega_1$ 为任意不是实数的复数,又取

$$\omega_2 = \frac{\overline{\omega}_1}{2\overline{\omega}_1 - 1}, \tag{5.106}$$

$$\lambda_\rho = \begin{cases} \omega_1 \ (\rho = 1, \cdots, k) \\ \omega_2 \ (\rho = k+1, \cdots, N) \end{cases} \quad (0 < k < N). \tag{5.107}$$

为使 $\omega_1 \neq \omega_2$,要求 $|2\omega_1 - 1| \neq 1$. 取 $h_1, \cdots, h_k$ 为相应于 $\lambda = \omega_1$ 的列向量解, $h_{k+1}, \cdots, h_N$ 为相应于 $\lambda = \omega_2$ 的列向量解,即

$$h_a = \Phi(\omega_1) l_a,$$

$$h_p = \Phi(\omega_2) l_p \tag{5.108}$$

$$(a = 1, 2, \cdots, k;\ p = k+1, \cdots, N),$$

这里 $l_1, \cdots, l_N$ 是线性无关的常数列向量.我们选取这些列向量使得在一定点(例如(0, 0)) $h_p$ 和 $h_a$ 在酉几何意义下正交,即

$$h_p^* h_a = 0 \tag{5.109}$$

成立.利用 Lax 对可见

$$(h_p^*)_{\bar\zeta} = (h_{p\zeta})^* = \left(\frac{\omega_2}{2\omega_2 - 1} B h_p\right)^* = -\omega_1 h_p^* A, \tag{5.110}$$

$$(h_p^* h_a)_{\bar\zeta} = -\omega_1 h_1^* A h_a + h_1^* \omega_1 A h_a = 0,$$

同样有

$$(h_p^* h_a)_\zeta = 0, \tag{5.111}$$

因而(5.109)式处处成立,即 $h_p$ 和 $h_a$ 处处有正交性.

从 $S$ 的定义可见

$$Sh_a = \frac{1}{\omega_1} h_a, \quad Sh_p = \frac{1}{\omega_2} h_p, \tag{5.112}$$

以及

$$h_a^* S^* = \frac{1}{\overline{\omega}_1} h_a^*, \quad h_p^* S^* = \frac{1}{\overline{\omega}_2} h_p^*, \tag{5.113}$$

所以

$$\begin{aligned}
h_a^*(S^* - S)h_b &= \left(\frac{1}{\overline{\omega}_1} - \frac{1}{\omega_1}\right) h_a^* h_b, \\
h_p^*(S^* - S)h_q &= \left(\frac{1}{\overline{\omega}_2} - \frac{1}{\omega_2}\right) h_p^* h_q, \\
h_p^*(S^* - S)h_a &= 0, \\
h_a^*(S^* - S)h_p &= 0, \\
(a, b = 1, \cdots, k;\ &p, q = k+1, \cdots, N).
\end{aligned} \tag{5.114}$$

依(5.106)式 $\omega_2$ 的取法,有下式成立:

$$\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\overline{\omega}_1} = \frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\overline{\omega}_2}, \tag{5.115}$$

所以

$$h_\beta^*(S^* - S)h_\alpha = h_\beta^*\left(\frac{1}{\overline{\omega}_1} - \frac{1}{\omega_1}\right) I h_\alpha$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, N).$$

由于 $\{h_\alpha\}$ 是线性无关的 $N$ 个列向量,所以

$$S^* - S = \left(\frac{1}{\overline{\omega}_1} - \frac{1}{\omega_1}\right) I, \tag{5.116}$$

从而

$$\begin{aligned}
A_1^* + B_1 &= (A_1 - S_{\overline{\zeta}})^* + B + S_\zeta \\
&= A^* + B - (S^*)_\zeta + S_\zeta = 0,
\end{aligned}$$

所以 $A_1$, $B_1$ 满足 $U(N)$ 群的约束条件(5.92)式. 从而得如下定理[38]:

**定理 5.7**　如果 $\lambda_\rho$ 和 $h_\rho$ 的选取满足(5.107)式和(5.109)式,且 $h_\rho$ 线性无关,那么 Darboux 变换(5.98)式给出了 $\mathbf{R}^2$ 到 $U(N)$ 的新的调和映照,此映照(除了右乘 $U(N)$ 中一个常值元素外)由

$$g_1 = \Phi_1(1)(\Phi_1|_0)^{-1}$$

给出,这里 $(\Phi_1|_0)$ 是 $\Phi_1$ 在一定点 $\zeta=0$ 时的值.

**注 5.9** 本书的记号和文献[74]略有不同,主要的差别是

(i) 本书中的 $A$, $B$ 相当于[74]中的 $2A_{\bar{\zeta}}$ 和 $2A_{\zeta}$;

(ii) 在 $A$, $B$ 的定义以及方程(5.96)中,矩阵乘法的次序相反,因而在许多地方出现了左乘和右乘的不同;

(iii) 本书中的参数 $\lambda$ 和 $\frac{\lambda}{2\lambda-1}$ 在文献[74]中以 $\frac{1}{2}(1-\lambda)$ 和 $\frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})$ 的形式出现. 为了行文方便,我们引入一个参数 $\mu=1-2\lambda$,用以表示[74]中所用的 $\lambda$.

除文献[74]外,有关这一主题的论述还可参看文献[81]和[43].

现在叙述如何从 Darboux 阵导出文献[74]中所引入的 $\mathbf{C}^N$ 中的投影算子 $\pi$ 和 $\pi^{\perp}$.

根据(5.116)式,有

$$S^* - \frac{1}{\bar{\omega}_1}I = S - \frac{1}{\omega_1}I,$$

所以 $S-\frac{1}{\omega_1}I$ 是 Hermitian 阵. 另一方面,由 $S$ 的公式可见

$$S-\frac{1}{\omega_1}I = H\left(\Lambda^{-1}-\frac{1}{\omega_1}I\right)H^{-1},$$

$S-\frac{1}{\omega_1}I$ 有 $k$ 个特征值为 0, $N-k$ 个特征值为 $\frac{1}{\omega_2}-\frac{1}{\omega_1}$, 因此

$$\pi = \frac{1}{\frac{1}{\omega_2}-\frac{1}{\omega_1}}\left(S-\frac{1}{\omega_1}I\right) = \left(\frac{1}{\omega_2}-\frac{1}{\omega_1}\right)^{-1}$$

$$\times H\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\omega_1}I_k & 0\\ 0 & \frac{1}{\omega_2}I_{N-k}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{\omega_1}I_k & 0\\ 0 & \frac{1}{\omega_1}I_{N-k}\end{pmatrix}\right)H^{-1}$$

$$=H\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{N-k}\end{pmatrix}H^{-1} \tag{5.117}$$

是 Hermitian 阵，$k$ 个特征值为 0，$N-k$ 个特征值为 1，因而它是一个投影阵，而

$$\pi^{\perp} = I - \pi = H\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}H^{-1} \tag{5.118}$$

是和 $\pi$ 互补的 Hermitian 投影阵，它的不变向量所构成的子空间和 $\pi$ 的不变向量所成的子空间正交. 从(5.117)式和(5.118)式得

$$S = \frac{1}{\omega_2}\pi + \frac{1}{\omega_1}\pi^{\perp}, \tag{5.119}$$

而 Darboux 阵

$$\begin{aligned} D = I - \lambda S &= \left(1 - \frac{\lambda}{\omega_2}\right)\pi + \left(1 - \frac{\lambda}{\omega_1}\right)\pi^{\perp} \\ &= (\pi + \gamma\pi^{\perp})\left(1 - \frac{\lambda}{\omega_2}\right), \end{aligned} \tag{5.120}$$

式中

$$\gamma = \frac{\omega_2(\omega_1 - \lambda)}{\omega_1(\omega_2 - \lambda)}. \tag{5.121}$$

**注 5.10**　$S$ 又可以写作

$$S = \frac{1}{\omega_1}I - \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)\pi. \tag{5.122}$$

把它代入(5.101)式就得

$$\begin{aligned} \pi_{\bar{\zeta}} &= -\omega_1\pi A + \omega_2 A\pi + (\omega_1 - \omega_2)\pi A\pi, \\ \pi_{\zeta} &= \bar{\omega}_1 B\pi - \bar{\omega}_2\pi B + (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)\pi B\pi, \end{aligned} \tag{5.123}$$

这个常微分方程组是文献[74]中用圈群的表示和分解导出来的，而在这里我们利用 Darboux 变换作出整体解 $\pi$ 的显式表达式[37]. 此外，还可看到(5.123)式是完全可积的. (5.117)式给出了它全部的解. 此外，

$$g_1 = \Phi_1(1)\Big/\left(1 - \frac{1}{\omega_2}\right) = (\pi + \gamma_1\pi^{\perp})\Phi(1) \tag{5.124}$$

是新的调和映照，这里

$$\gamma_1 = \frac{1 - 1/\omega_1}{1 - 1/\omega_2} \tag{5.125}$$

满足 $\bar{\gamma}_1\gamma_1 = 1$. 如果所考虑的是到 $SU(N)$ 的调和映照,则可得到新的调和映照

$$g_1 = \Phi_1(1)(I - \Lambda^{-1})^{-1}. \tag{5.126}$$

### 5.4.2 孤立子解[38]

和§5.3中所述相仿,在此可以作出 $\mathbf{R}^2 \to U(N)$ 调和映照的孤立子解. 为简洁计,取 $N = 2$, 要作的是 $\mathbf{R}^2 \to SU(2)$ 调和映照的孤立子解. 取种子解为

$$g_0 = \begin{pmatrix} e^{\tau\bar{\zeta}-\bar{\tau}\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-(\tau\bar{\zeta}-\bar{\tau}\zeta)} \end{pmatrix} \quad (\tau \text{ 为非 } 0 \text{ 复数}),$$

相应的

$$A = g_{0\bar{\zeta}} g_0^{-1} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{pmatrix}, \quad B = g_{0\zeta} g_0^{-1} = \begin{pmatrix} -\bar{\tau} & 0 \\ 0 & \bar{\tau} \end{pmatrix}.$$

解 Lax 对(5.96)式,得到

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} l(\lambda) & 0 \\ 0 & l^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{5.127}$$

这里

$$l(\lambda) = \exp\left(\lambda\tau\bar{\zeta} - \frac{\lambda}{2\lambda - 1}\bar{\tau}\zeta\right). \tag{5.128}$$

取 $\omega_1$ 为一复数,满足 $|2\omega_1 - 1| \neq 1$, 又令

$$\omega_2 = \frac{\bar{\omega}_1}{2\bar{\omega}_1 - 1}.$$

容易见到

$$l^{-1}(\omega_1) = \overline{l(\omega_2)}, \quad l^{-1}(\omega_2) = \overline{l(\omega_1)}. \tag{5.129}$$

取阵

$$H = \begin{pmatrix} l(\omega_1) & -\bar{a}l(\omega_2) \\ al^{-1}(\omega_1) & l^{-1}(\omega_2) \end{pmatrix}, \tag{5.130}$$

则

$$\det H = |l(\omega_1)|^2 + |a|^2 |l(\omega_2)|^{-2}. \tag{5.131}$$

依(5.105)式得

$$S = \frac{1}{e^r + |a|^2 e^{-r}} \begin{pmatrix} \dfrac{e^r}{\omega_1} + |a|^2 \dfrac{e^{-r}}{\omega_2} & \left(\dfrac{1}{\omega_1} - \dfrac{1}{\omega_2}\right)\bar{a}e^{is} \\ \left(\dfrac{1}{\omega_1} - \dfrac{1}{\omega_2}\right)ae^{-is} & \dfrac{e^r}{\omega_2} + |a|^2 \dfrac{e^{-r}}{\omega_1} \end{pmatrix}, \tag{5.132}$$

式中

$$r = (\omega_1 - \omega_2)\tau\bar{\zeta} + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\bar{\tau}\zeta,$$
$$s = -\mathrm{i}((\omega_1 + \omega_2)\tau\bar{\zeta} - (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)\bar{\tau}\zeta) \tag{5.133}$$

均为实值. 又可给 $r$, $s$ 添上常数项,使得 $|a|^2$, $a$, $\bar{a}$ 均可吸收到 $\mathrm{e}^{\pm r}$, $\mathrm{e}^{\pm is}$ 中,使得 $S$ 的表达式中 $a$ 值为 1,从而得到调和映照

$$g_1 = \Phi_1(1) = (I - S)\begin{pmatrix} \dfrac{\omega_1}{1-\omega_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega_2}{1-\omega_2} \end{pmatrix} g_0(\zeta, \bar{\zeta}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{5.134}$$

其中

$$\alpha = \left(\mathrm{e}^r + \frac{1}{\gamma_1}\mathrm{e}^{-r}\right)\mathrm{e}^{\tau\bar{\zeta} - \bar{\tau}\zeta}, \quad \beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1(1-\omega_2)}\mathrm{e}^{is - (\tau\bar{\zeta} - \bar{\tau}\zeta)}, \tag{5.135}$$

而 $\gamma_1$ 由(5.125)式所定义,$g_1$ 的形态和 $\mathbf{R}^{1,1}$ 时相仿. 可以显式地作 $k$ 重孤立子,并证明当 $y \to \pm\infty$ 时,它能够分解为 $k$ 个单孤立子. 这种演算的论证和 $\mathbf{R}^{1,1}$ 相仿,这里就不再重复了.

### 5.4.3　酉子(Uniton)

酉子是 $\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^2$ 的某一区域 $\Omega$)到 $U(N)$的特殊的调和映照,是 K. Uhlenbeck 在文献[74]中引进的. 由于 $S^2$ 到 $U(N)$的调和映照必为酉子,所以特别重要. 在叙述它的定义之前,先对参数作一变换.

对 Lax 对(5.96)式,令

$$\lambda = \frac{1-\mu}{2}, \quad \frac{\lambda}{2\lambda - 1} = \frac{1-\mu^{-1}}{2}, \tag{5.136}$$

又记

$$\Phi(\lambda) = \Phi\left(\frac{1-\mu}{2}\right) = \Psi(\mu),$$

这时 Lax 对为

$$\Psi_{\bar{\zeta}} = \frac{1-\mu}{2}A\Psi, \quad \Psi_{\zeta} = \frac{1-\mu^{-1}}{2}B\Psi. \tag{5.137}$$

**定义 5.2**　设 $g$ 为 $\mathbf{R}^2$(或 $\Omega$)到 $U(N)$的调和映照,如果它容有一个拓广解 $\Psi(\mu)$,满足下列 4 个条件:

$$\text{(a)}\ \Psi(\mu)=\sum_{a=0}^{n}T_a\mu^a\quad(\mu\text{ 的多项式});\tag{5.138}$$

$$\text{(b)}\ \Psi(1)=I;\tag{5.139}$$

$$\text{(c)}\ \Psi(-1)=g;\tag{5.140}$$

$$\text{(d)}\ \Psi(\mu)^*=\Psi(\bar{\mu}^{-1})^{-1}\quad(\mu\neq 0),\tag{5.141}$$

则 $g$ 称为**酉子**，$\Psi(\mu)$为**酉子拓广解**.

现在分析这些条件:(b)、(c)、(d)为对初始条件的限制.(b)表示 $\mu=1$ 时，初始值 $\Psi(\mu)|_0=I$;(c)表示 $\mu=-1$ 时，$\Psi(\mu)|_0\in U(N)$;条件(d)如果在初始时成立，即 $\Psi(\mu)^*|_0=(\Psi(\bar{\mu}^{-1})|_0)^{-1}$，则由于 Lax 对和 $A$, $B$ 所满足的约束条件 $A^*=-B$，就可推出(d)处处成立，这可以由对 $\Psi(\mu)^*\Psi(\bar{\mu}^{-1})$进行微分而见到.(a)是一个实质性的条件，但它以(b)、(d)的成立为前提.对同一酉子，拓广解 $\Psi(\mu)$及其次数不是唯一的，这些次数的最小值称为酉子的次数，或酉子数[74].下面先作代数上的准备.

**定理 5.8** $\mathbf{C}^N$ 中 $N\times N$ 阵所成的关于 $\mu$ 的多项式

$$\Psi(\mu)=\sum_{a=0}^{n}T_a\mu^a$$

如果满足条件(b)和(d)，那么 $\Psi(\mu)$必是形式

$$\Psi(\mu)=(\pi_1+\mu\pi_1^{\perp})\cdots(\pi_n+\mu\pi_n^{\perp}),\tag{5.142}$$

式中的 $\pi_a(a=1,\cdots,n)$ 为 Hermitian 投影，$\pi_a^{\perp}$ 为其正交补.

**证明** 先考察 $n=1$ 时，即

$$\Psi(\mu)=T_0+T_1\mu.$$

由 $\Psi(1)=I$ 得知 $T_0+T_1=I$，条件(d)成为

$$(T_0+(I-T_0)\mu)^*(T_0+(I-T_0)\bar{\mu}^{-1})=I,$$

由此得

$$T_0^*(I-T_0)\doteq(I-T_0)^*T_0=0,$$

$$T_0^*T_0+(I-T_0^*)(I-T_0)=I,$$

因而

$$T_0^*T_0=T_0^*=T_0,$$

所以 $T_0$ 为 Hermitian 投影算子 $\pi_0$，由(b)知 $T_1$ 为 $\pi_0^{\perp}$.

以下用数学归纳法证明一般的结果. 设(5.142)式对 $n$ 成立，且

$$\widetilde{\Psi}(\mu) = \sum_{a=0}^{n+1} T_a \mu^a$$

满足条件(b)、(d). 不妨设 $T_0 \neq 0$，$T_{n+1} \neq 0$（否则，就归结到低于 $n+1$ 次的情形）. 作 $\det \Psi(\mu)$，它是 $\mu$ 的多项式，如果它有非零根 $\mu = \mu_0 \neq 0$，那么 $\Psi(\mu_0)$ 为退化的，其逆不存在，这与(d)矛盾. 因此 $\det T_0 = 0$，$T_0 l = 0$ 关于列向量 $l$ 有非零解. 取由这些非零解所张成的子空间 $P$，作到 $P$ 的 Hermitian 投影算子，它是非平凡的，记为 $\pi_{n+1}^{\perp}$，其正交补为 $\pi_{n+1}$（$\pi_{n+1} \neq 0$，$\pi_{n+1}^{\perp} \neq 0$）.

令

$$\Psi(\mu) = \widetilde{\Psi}(\mu)(\pi_{n+1} + \mu^{-1}\pi_{n+1}^{\perp}).$$

由于 $T_0 \pi_{n+1}^{\perp} = 0$，$\Psi(\mu)$是 $\mu$ 的 $n$ 次多项式，且显然条件(b)成立. 以下考察

$$\begin{aligned}\Psi(\bar{\mu}^{-1})\Psi(\mu)^* &= \widetilde{\Psi}(\bar{\mu}^{-1})(\pi_{n+1} + \bar{\mu}\pi_{n+1}^{\perp})(\pi_{n+1} + \bar{\mu}^{-1}\pi_{n+1}^{\perp})\widetilde{\Psi}(\mu)^* \\ &= \widetilde{\Psi}(\bar{\mu}^{-1})\widetilde{\Psi}(\mu)^* = I,\end{aligned}$$

由归纳法假定，$\Psi(\mu) = \prod_{a=1}^{n}(\pi_a + \mu\pi_a^{\perp})$，因而

$$\widetilde{\Psi}(\mu) = \prod_{a=1}^{n+1}(\pi_a + \mu\pi_a^{\perp}). \quad \blacksquare$$

这定理启示：酉子拓广解可用(5.142)式形状的多项式来表达，但这里所说的只是逐点分解，不能得到 $\pi_a$ 和 $\pi_a^{\perp}$ 的光滑性. 后文将有进一步的论述.

在文献[74]中，完成了一次酉子的构作，其方法和结果如下：

设 $\Psi(\mu) = \pi + \mu\pi^{\perp}$ 为酉子的拓广解，作

$$\begin{aligned}\Psi_{\bar{\zeta}}(\mu)\Psi^{-1}(\mu) &= (1-\mu)\pi_{\bar{\zeta}}(\pi + \mu^{-1}\pi^{\perp}) \\ &= (1-\mu)\pi_{\bar{\zeta}}\pi + \frac{1-\mu}{\mu}\pi_{\bar{\zeta}}\pi^{\perp},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{\zeta}(\mu)\Psi^{-1}(\mu) &= (1-\mu)\pi_{\zeta}(\pi + \mu^{-1}\pi^{\perp}) \\ &= (1-\mu^{-1})(-\pi_{\zeta}\pi^{\perp}) + (1-\mu)\pi_{\zeta}\pi.\end{aligned}$$

和 Lax 对(5.137)式相比较,则有

$$A = 2\pi_{\bar{\zeta}}\pi, \quad B = -2\pi_{\zeta}\pi^{\perp} \tag{5.143}$$

和 $\pi$ 应满足的条件

$$\pi_{\bar{\zeta}}\pi^{\perp} = 0, \quad \pi_{\zeta}\pi = 0. \tag{5.144}$$

后面两个条件实际上是等价的,因为

$$\pi_{\zeta}\pi = (\pi\pi_{\bar{\zeta}})^{*} = (-\pi\pi^{\perp}_{\bar{\zeta}})^{*} = (\pi_{\bar{\zeta}}\pi^{\perp})^{*},$$

所以(5.144)式实际上只有一个条件,并且可写为

$$\pi^{\perp}\pi_{\zeta} = 0, \tag{5.144$'$}$$

满足这个条件的 $\pi$ 显式构作的方法如下:

我们首先注意到,如果 $u_1, \cdots, u_k$ 是 $k$ 个线性无关的向量函数,满足

$$u_{a\zeta} = \sum c_{ab}u_b, \tag{5.145}$$

则对以任意函数为系数的可逆线性组合

$$v_a = \sum q_{ab}u_b \quad (\det(q_{ab}) \neq 0),$$

$v_{a\zeta}$ 也是 $v_1, \cdots, v_k$ 的线性组合. 现设 $v_1, \cdots, v_k$ 是 $u_1, \cdots, u_k$ 的 Gram-Schmidt 正交化,即它们是 $u_1, \cdots, u_k$ 的线性组合,且满足

$$v_b^{*}v_a = \delta_{ba}, \tag{5.146}$$

那么

$$\pi = \sum v_a v_a^{*} \tag{5.147}$$

就是一个秩为 $k$ 的 Hermitian 投影算子,

$$\pi^{*} = \pi, \quad \pi^2 = \pi, \tag{5.148}$$

且以 $v_1, \cdots, v_k$(因而也以 $u_1, \cdots, u_k$)为不变向量. 此外,由(5.145)式可知 $v_{a\zeta} = \sum \tilde{c}_{ab}v_b$ (这里$\tilde{c}_{ab}$是适当的函数),

$$\pi_{\zeta} = \sum \tilde{c}_{ab}v_b v_a^{*} + \sum v_a v_{a\zeta}^{*},$$

再由 $\pi^{\perp}v_a = (I-\pi)v_a = v_a - v_a = 0$ 可见(5.144)$'$式成立.

相反,如果 $\pi$ 是秩为 $k$ 的 Hermitian 投影算子,满足(5.144)$'$式,则对

它的 $k$ 个线性无关的不变向量 $u_a$，有

$$\pi u_a = u_a, \quad \pi^{\perp} u_a = 0$$

成立. 并且由于(5.144)′式,

$$\pi^{\perp} u_{a\zeta} = \pi^{\perp}(\pi u_a)_{\zeta} = \pi^{\perp}\pi_{\zeta} u_a + \pi^{\perp}\pi u_{a\zeta} = 0,$$

所以 $u_{a\zeta}$ 是 $u_1, \cdots, u_k$ 的线性组合.

不仅如此,满足(5.145)式的向量组 $u_a$ 经适当线性组合成为线性无关的 $w_1, \cdots, w_k$ 之后能够满足

$$w_{a\zeta} = 0.$$

事实上,记 $U$ 为 $N \times k$ 阵$(u_1, \cdots, u_k)$,$C$ 为 $k \times k$ 可逆阵$(c_{ab})$,$U$ 满足

$$U_{\zeta} = UC.$$

又令 $\boldsymbol{W} = (w_1, \cdots, w_k) = UB$, $B$ 为 $k \times k$ 可逆阵,那么

$$\boldsymbol{W}_{\zeta} = U_{\zeta}B + UB_{\zeta} = U(CB + B_{\zeta}).$$

在此求解线性方程

$$B_{\zeta} + CB = 0$$

就能决定 $B$.

所以为了作 $\pi$,只需从一组线性无关的列向量 $w_a$ 出发,它们的分量都是$\bar{\zeta}$ 的全纯函数(即 $\zeta$ 的反全纯函数)就可以了. 这样就解决了一次的酉子的构作问题.

**注 5.11**　在 $\mathbf{R}^2$(或 $\Omega$)上每一点附上 $\mathbf{C}^N$ 的 $k$ 维平面的集合,称为 $\mathbf{R}^2$(或 $\Omega$)**上的 $k$ 维平面丛**,其上每一点附上一个 $k$ 维平面,称为这 $k$ 维平面丛的一个截面,它可以由每一点附上一个 $k$ 维的 Hermitian 投影算子 $\pi$ 来描述,即由 $\pi = \pi(\zeta, \bar{\zeta})$ 来描述. 在文献[74]中关于 $\pi$ 的条件是 $\pi^{\perp}\pi_{\bar{\zeta}} = 0$,即由 $\pi$ 描述的截面为全纯的. 由于记号不同(见注 5.9),此处相应的条件成为 $\pi_{\bar{\zeta}}\pi^{\perp} = 0$ 或即 $\pi^{\perp}\pi_{\zeta} = 0$, 即由 $\pi$ 描述的截面为反全纯的. 如上所述,这种截面可以由 $k$ 个反全纯的线性无关的向量所生成.

**例 5.1**　取 $N = 2$, $f$ 和 $g$ 为$\bar{\zeta}$ 的两个全纯函数,不同时为0. 令

$$u = \frac{1}{(|f|^2 + |g|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

那么

$$\pi=\frac{1}{|f|^2+|g|^2}\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}(\bar{f},\bar{g})$$

$$=\frac{1}{|f|^2+|g|^2}\begin{pmatrix}|f|^2 & f\bar{g}\\ g\bar{f} & |g|^2\end{pmatrix},$$

$$\pi^{\perp}=I-\pi=\frac{1}{|f|^2+|g|^2}\begin{pmatrix}|g|^2 & -f\bar{g}\\ -g\bar{f} & |f|^2\end{pmatrix}.$$

酉子 $g$ 的表达式为

$$g=\pi-\pi^{\perp}=\frac{1}{|f|^2+|g|^2}\begin{pmatrix}|f|^2-|g|^2 & 2f\bar{g}\\ 2g\bar{f} & |g|^2-|f|^2\end{pmatrix},$$

而拓广解为

$$\Psi(\mu)=\frac{1}{|f|^2+|g|^2}\begin{pmatrix}|f|^2+\mu|g|^2 & (1-\mu)f\bar{g}\\ (1-\mu)g\bar{f} & |g|^2+\mu|f|^2\end{pmatrix}.$$

### 5.4.4 酉子的 Darboux 变换和奇异 Darboux 变换

设 $g$ 为酉子，$\Psi(\mu)$为其拓广解. 我们可以作其 Darboux 变换. 我们假设 $\Psi(\mu)$已满足规范化条件：$\Psi^*(\bar{\mu}^{-1})=\Psi(\mu)^{-1}$，为 $\mu$ 的多项式.

作 Darboux 变换，$\omega_1$，$\omega_2$的取值为

$$\omega_1=\frac{1-\varepsilon}{2},\quad \omega_2=\frac{1-\bar{\varepsilon}^{-1}}{2},\tag{5.149}$$

这相当于 $\mu$ 取值 $\varepsilon$ 和$\bar{\varepsilon}^{-1}$. 又可取坐标及基，使

$$L_1=(l_1\quad\cdots\quad l_k)=\begin{pmatrix}I_k\\ 0\end{pmatrix},\quad L_1^{\perp}=L_2=(l_{k+1}\quad\cdots\quad l_N)=\begin{pmatrix}0\\ I_{N-k}\end{pmatrix}.$$

这时，

$$\begin{aligned}&H_\varepsilon=(\Psi(\varepsilon)L_1\quad \Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})L_2),\\ &\pi_\varepsilon=H_\varepsilon\begin{pmatrix}0&0\\0&I_{N-k}\end{pmatrix}H_\varepsilon^{-1},\quad \pi_\varepsilon^{\perp}=H_\varepsilon\begin{pmatrix}I_k&0\\0&0\end{pmatrix}H_\varepsilon^{-1}.\end{aligned}\tag{5.150}$$

于是，酉子拓广解 $\Psi(\mu)$的 Darboux 变换可写为

$$\Psi_1(\mu) = (\pi_\varepsilon + \gamma\pi_\varepsilon^\perp)\Psi(\mu)(\sigma + \gamma^{-1}\sigma^\perp), \tag{5.151}$$

式中，$(\pi_\varepsilon + \gamma\pi_\varepsilon^\perp)$ 为 Darboux 阵，$(\sigma + \gamma^{-1}\sigma^\perp)$ 为右乘的和$(u, v)$无关的因子，而 $\sigma$ 和 $\sigma^\perp$ 为到子空间 $L_1^\perp$ 和 $L_1$ 的投影算子，且

$$\gamma = \gamma_\varepsilon(\mu) = \frac{\omega_2\left(\omega_1 - \dfrac{1-\mu}{2}\right)}{\omega_1\left(\omega_2 - \dfrac{1-\mu}{2}\right)} = \frac{(\mu - \varepsilon)(\bar{\varepsilon} - 1)}{(\bar{\varepsilon}\mu - 1)(1 - \varepsilon)}. \tag{5.152}$$

显然，

$$\gamma_\varepsilon(\bar{\mu}^{-1}) = \frac{(\bar{\mu}^{-1} - \varepsilon)(\bar{\varepsilon} - 1)}{(\bar{\varepsilon}\bar{\mu}^{-1} - 1)(1 - \varepsilon)} = \frac{(1 - \varepsilon\bar{\mu})(\bar{\varepsilon} - 1)}{(\bar{\varepsilon} - \bar{\mu})(1 - \varepsilon)} = \overline{(\gamma_\varepsilon(\mu))}^{-1}. \tag{5.153}$$

因而，

$$\Psi_1(\bar{\mu}^{-1}) = (\pi_\varepsilon + \bar{\gamma}^{-1}\pi_\varepsilon^\perp)\Psi(\bar{\mu}^{-1})(\sigma + \gamma\sigma^\perp),$$

$$\Psi_1^*(\bar{\mu}^{-1})^{-1} = (\pi_\varepsilon + \gamma\pi_\varepsilon^\perp)\Psi(\mu)^{-1}(\sigma + \gamma^{-1}\sigma^\perp) = \Psi_1(\mu). \tag{5.154}$$

所以 $\Psi_1$ 也满足规范化条件.

再看

$$\Psi_1(\mu) = \pi_\varepsilon\Psi(\mu)\sigma + \pi_\varepsilon\Psi(\mu)\gamma^{-1}(\mu)\sigma^\perp + \pi_\varepsilon^\perp\gamma(\mu)\Psi(\mu) + \pi_\varepsilon^\perp\Psi(\mu)\sigma^\perp, \tag{5.155}$$

右边第一、四项是 $\mu$ 的多项式，第二、三项是 $\mu$ 的有理函数，第二项在 $\mu = \varepsilon$ 处可能为极点，第三项在 $\mu = \bar{\varepsilon}^{-1}$ 处可能为极点，但我们可证明，这两项中的分母 $\dfrac{1}{\mu - \varepsilon}$ 和$\dfrac{1}{\bar{\varepsilon}\mu - 1}$ 都可以和分子消去，也就是说，它们都是 $\mu$ 的多项式. 因此 $\Psi_1(\mu)$也是 $\mu$ 的多项式. 现在对此作出证明.

我们要把 $\pi_\varepsilon$，$\pi_\varepsilon^\perp$ 更具体地写出来. 先注意到 $H_\varepsilon$ 的逆阵 $H_\varepsilon^{-1}$ 可以具体地写出：

$$H_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} C_1(\varepsilon)L_1^*\Psi(\varepsilon)^* \\ C_2(\varepsilon)L_2^*\Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})^* \end{pmatrix}, \tag{5.156}$$

式中的 $k \times k$ 阵 $C_1(\varepsilon)$和 $(N-k) \times (N-k)$ 阵 $C_2(\varepsilon)$分别由方程

$$C_1(\varepsilon)L_1^*\Psi(\varepsilon)^*\Psi(\varepsilon)L_1 = I_k,$$
$$C_2(\varepsilon)L_2^*\Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})^*\Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})L_2 = I_{N-k} \tag{5.157}$$

确定. 容易看出, $L_1^*\Psi(\varepsilon)^*\Psi(\varepsilon)L_1$ 为 $k\times k$ 非异阵. 事实上,若有 $k$ 维列向量 $l$,使 $L_1^*\Psi(\varepsilon)^*\Psi(\varepsilon)L_1 l = 0$ 成立,则由 $l^* L_1^*\Psi(\varepsilon)^*\Psi(\varepsilon)L_1 l = 0$ 得出 $\Psi(\varepsilon)L_1 l = 0$, 从而有 $L_1 l = 0$ 和 $l = 0$ 成立. 所以 $C_1(\varepsilon)$是唯一存在的,同理 $C_2(\varepsilon)$也是唯一存在的. 从而

$$\pi_\varepsilon = H_\varepsilon\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{N-k}\end{pmatrix}H_\varepsilon^{-1} = \Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})L_2C_2(\varepsilon)L_2^*\Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})^*,$$
$$\pi_\varepsilon^\perp = H_\varepsilon\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}H_\varepsilon^{-1} = \Psi(\varepsilon)L_1C_1(\varepsilon)L_1^*\Psi(\varepsilon)^*, \tag{5.158}$$

因而,

$$\pi_\varepsilon\Psi(\mu)\gamma^{-1}(\mu)\sigma^\perp = \Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})L_2C_2(\varepsilon)L_2^*\Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})^*\Psi(\mu)\gamma^{-1}\sigma^\perp. \tag{5.159}$$

右边记为 $\gamma^{-1}F(\mu)$. 当 $\mu=\varepsilon$ 时,

$$F(\varepsilon) = \Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})L_2C_2(\varepsilon)L_2^*\Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})^*\Psi(\varepsilon)\sigma^\perp. \tag{5.160}$$

注意到规范化条件 $\Psi(\bar{\varepsilon}^{-1})^*\Psi(\varepsilon) = I$ 和

$$\sigma^\perp = \begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $F(\varepsilon)=0$,即 $\mu=\varepsilon$ 并非(5.155)式第二项的极点,此式的第三项也可同样处理.

这样就得到

**定理 5.9** Darboux 变换(带右乘规范化因子$(\sigma+\mu^{-1}\sigma^\perp)$)使酉子拓广解 $\Psi(\mu)$变为酉子拓广解 $\Psi_1(\mu)$,但 $\Psi_1(\mu)$关于 $\mu$ 的次数不会超过 $\Psi(\mu)$关于 $\mu$ 的次数.

前已指出,同一酉子解的拓广解不是唯一的,次数也不是确定的,但必须有一个最低的次数,称为酉子数. 因为 $\Psi_1(\mu)$关于 $\mu$ 的次数不会超过 $\Psi(\mu)$关于 $\mu$ 的次数,所以 Darboux 变换不会增加酉子数.

在文献[74]中提出了奇异的 Bäcklund 变换,即在以 $\varepsilon$ 为参数的

Bäcklund 变换中令 $\varepsilon \to 0$ 时所得到的变换. 因为 Bäcklund 变换的显式形式可由 Darboux 变换写出,利用 Darboux 变换,令 $\varepsilon \to 0$ 应该能够得到奇异的 Bäcklund 变换的显式表达式,又称奇异的 Darboux 变换. 显然,当 $\varepsilon \to 0$ 时,$\gamma_\varepsilon \to \mu$. 如果 $\pi_\varepsilon \to \pi$, $\pi_\varepsilon^\perp \to \pi^\perp$, 就有奇异的 Darboux 变换

$$\Psi_1(\mu) = (\pi + \mu\pi^\perp)\Psi(\mu).$$

**引理 5.2**　设 $\Psi(\mu)$为酉子拓广解, $\Psi_1(\mu) = (\pi + \mu\pi^\perp)\Psi(\mu)$ 为酉子拓广解的充要条件为 $\pi$ 满足

$$(2\pi_{\bar{\zeta}} + \pi A)\pi^\perp = 0, \tag{5.161}$$

$$\pi^\perp A\pi = 0, \tag{5.162}$$

**证明**　由直接计算得

$$\begin{aligned}\Psi_{1\bar{\zeta}}\Psi_1^{-1} &= \frac{1-\mu}{2}(2\pi_{\bar{\zeta}}\pi + \pi A\pi + \pi^\perp A\pi^\perp) \\ &\quad + \frac{1-\mu}{2\mu}(2\pi_{\bar{\zeta}}\pi^\perp + \pi A\pi^\perp) + \frac{\mu(1-\mu)}{2}\pi^\perp A\pi \\ &= \frac{1-\mu}{2}A_1,\end{aligned}$$

从而就得(5.161)式和(5.162)式.

另一方面,

$$\begin{aligned}\Psi_{1\zeta}\Psi_1^{-1} &= \frac{1-\mu^{-1}}{2}(-2\pi_\zeta\pi^\perp + \pi B\pi + \pi^\perp B\pi^\perp) \\ &\quad + \frac{1-\mu}{2}(2\pi_\zeta\pi - \pi^\perp B\pi) + \frac{1-\mu^{-1}}{2\mu}\pi B\pi^\perp \\ &= \frac{1-\mu^{-1}}{2}B_1,\end{aligned}$$

从而就得

$$2\pi_\zeta\pi - \pi^\perp B\pi = 0, \tag{5.161$'$}$$

$$\pi B\pi^\perp = 0. \tag{5.162$'$}$$

但(5.161)′式,(5.162)′式分别和(5.161)式,(5.162)式等价,事实上,对(5.162)式取转置共轭,就得到(5.162)′式,对(5.161)′式作转置共轭,成立

$$0 = 2\pi\pi_{\bar{\zeta}} + \pi A\pi^\perp = -2\pi\pi_{\bar{\zeta}}^\perp + \pi A\pi^\perp = 2\pi_{\bar{\zeta}}\pi^\perp + \pi A\pi^\perp.$$

这就是(5.161)式. 引理证毕. ∎

附带说明,若在 Bäcklund 变换的方程(5.123)式中令 $\varepsilon \to 0$, 就得到(5.161)式和(5.162)式. 所以(5.161)式和(5.162)式在文献[74]中被称为奇异 Bäcklund 变换的方程.

应该注意的是,当 $\varepsilon \to 0$ 时, $C_1(\varepsilon)$ 和 $C_2(\varepsilon)$ 未必收敛于一定的极限, $L_1^*\boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)^*\boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)L_1$ 和 $L_2^*\boldsymbol{\Psi}(\bar{\varepsilon}^{-1})^*\boldsymbol{\Psi}(\bar{\varepsilon}^{-1})L_2$ 未必收敛于非异阵,因而我们需要用下列技巧作出 $\pi_\varepsilon$ 收敛于 $\pi$ 的过程. 这个方法能够把 $\varepsilon \to 0$ 时会变成$\infty$的因子消去而得到有限的结果,因此可以称作重整化方法[40].

$\boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)L_1$ 的秩数为 $k$. 从(5.158)式的第二式和(5.157)式的第一式,有

$$\pi_\varepsilon^\perp \boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)L_1 = \boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)L_1.$$

因而 $\boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)L_1$ 中每一列均为 $\pi_\varepsilon^\perp$ 的不变向量,它们是关于 $\varepsilon$ 的多项式,次数不超过 $n$. 我们要把它们重新组合,考察其关于 $\varepsilon$ 的 0 次方的项,选取其最大的线性无关组, $\boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)L_1$ 相应的列向量构成一个矩阵

$$\chi^0 = \chi_0^0 + \chi_1^0\varepsilon + \cdots + \chi_n^0\varepsilon^n,$$

其中 $\chi_0^0$ 是满秩的阵,并且 $\boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)L_1$ 中其余各列向量关于 $\varepsilon$ 的 0 次项的系数都是它们的线性组合,把这些列减去 $\chi^0$ 中各列的适当的线性组合,消去了 $\varepsilon^0$ 的系数,再除以 $\varepsilon$,就得到形为

$$b + b_1\varepsilon + \cdots + b_{n-1}\varepsilon^{n-1}$$

的一组向量,从上式的这些 $b$ 中选取一部分,使和 $\chi_0^0$ 组成最大的线性无关向量组,并令相应的列向量排成

$$\chi^1 = \chi_0^1 + \chi_1^1\varepsilon + \cdots + \chi_{n-1}^1\varepsilon^{n-1},$$

继续依这个方式进行下去,直到没有剩余的、和它们线性无关的不变向量为止. 这样,就把 $\pi_\varepsilon^\perp$ 的不变向量排成

$$[\chi^0, \chi^1, \cdots, \chi^s]$$

的形式,而

$$\begin{aligned} \chi^0 &= \chi_0^0 + \chi_1^0\varepsilon + \cdots + \chi_n^0\varepsilon^n, \\ \chi^1 &= \chi_0^1 + \chi_1^1\varepsilon + \cdots + \chi_{n-1}^1\varepsilon^{n-1}, \\ &\cdots\cdots \\ \chi^s &= \chi_0^s + \chi_1^s\varepsilon + \cdots + \chi_{n-s}^s\varepsilon^{n-s}, \end{aligned} \tag{5.163}$$

式中的 $\chi_i^a(a=0,\cdots,s;\ i=0,\cdots,n)$ 均为同 $\varepsilon$ 无关的阵，而且和 $\varepsilon$ 无关的项所成的阵

$$\chi=[\chi_0^0,\cdots,\chi_0^s] \tag{5.164}$$

的秩必为 $k$，否则，重组过程还不能终止. 这样，$[\chi^0,\cdots,\chi^s]$ 的各列是 $\pi_\varepsilon^\perp$ 的不变向量，它们组成平面 $P_\varepsilon$. 显然，当 $\varepsilon\to 0$ 时，这平面有一极限 $P$，它是由 $\chi$ 的各列组成的，所以 $P_\varepsilon\to P$，因而 $\pi_\varepsilon^\perp$ 也有极限，它就是投影到 $P$ 的 Hermitian 投影算子 $\pi^\perp$. 令 $\tilde{\chi}$ 为 $\chi$ 的 Gram-Schmidt 正交化，则得到公式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\pi_\varepsilon^\perp=\tilde{\chi}\,\tilde{\chi}^*=\pi^\perp,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\pi_\varepsilon=\pi=1-\pi^\perp. \tag{5.165}$$

这样就证明了 $\varepsilon\to 0$ 时 $\pi_\varepsilon$ 和 $\pi_\varepsilon^\perp$ 的收敛性. 利用调和映照的一些性质(见文献[97])，还可证明它们的导数的收敛性，从而得到

**定理 5.10** $\pi^\perp=\tilde{\chi}\,\tilde{\chi}^*$，$\pi=1-\pi^\perp$ 满足(5.161)式，并且

$$\Psi_1=(\pi+\mu\pi^\perp)\Psi$$

为新的酉子拓广解.

**注 5.12** $\pi^\perp$ 的构作可再作如下的说明. 记 $V_\varepsilon=\Phi(\varepsilon)L_1$，这是一个 $N\times k$ 阵，秩为 $k$，$\pi_\varepsilon^\perp$ 的不变平面由 $V_\varepsilon$ 的各列张成. 由于 $V_\varepsilon$ 满秩，所以 $V_\varepsilon^*V_\varepsilon$ 是 $k\times k$ 的非异阵. 作 $N\times N$ 阵

$$W_\varepsilon=V_\varepsilon(V_\varepsilon^*V_\varepsilon)^{-1}V_\varepsilon^*,$$

容易见到

$$W_\varepsilon^*=W_\varepsilon,\quad W_\varepsilon^2=W_\varepsilon,\quad W_\varepsilon V_\varepsilon=V_\varepsilon,$$

所以

$$\pi_\varepsilon^\perp=W_\varepsilon=V_\varepsilon(V_\varepsilon^*V_\varepsilon)^{-1}V_\varepsilon^*. \tag{5.166}$$

设 $K$ 是 $k\times k$ 的满秩阵，$V'_\varepsilon=V_\varepsilon K$，那么同样也有

$$\pi_\varepsilon^\perp=V'_\varepsilon(V'^*_\varepsilon V'_\varepsilon)^{-1}V'^*_\varepsilon. \tag{5.167}$$

前面所说的重整化就是以适当的

$$V'_\varepsilon=[\chi^0,\chi^1,\cdots,\chi^s]=\chi+\varepsilon\chi_1+\cdots+\varepsilon^n\chi_n \tag{5.168}$$

来代替 $V_\varepsilon$，这里的 $\chi$ 的秩数是 $k$. 从这里就见到当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\pi_\varepsilon^\perp=\chi(\chi^*\chi)^{-1}\chi^*. \tag{5.169}$$

所以(5.165)式可以写成为

$$\pi^\perp=\chi(\chi^*\chi)^{-1}\chi^*. \tag{5.170}$$

它比(5.165)式简洁一些,没有出现 Gram-Schmidt 正交化的运算.

现在以 $n=1$ 为例来说明 $\varepsilon\to 0$ 时,$\pi_\varepsilon$ 和 $\pi_\varepsilon^\perp$ 收敛于 $\pi$ 和 $\pi^\perp$ 的极限过程.

当 $n=1$ 时,

$$\Psi(\mu)=\pi_1+\mu\pi_1^\perp,$$

$$\pi_\varepsilon=(\pi_1+\bar{\varepsilon}^{-1}\pi_1^\perp)L_2C_2(\varepsilon)L_2^*(\pi_1+\varepsilon^{-1}\pi_1^\perp), \tag{5.171}$$

$$\pi_\varepsilon^\perp=(\pi_1+\varepsilon\pi_1^\perp)L_1C_1(\varepsilon)L_1^*(\pi_1+\bar{\varepsilon}\pi_1^\perp), \tag{5.172}$$

而

$$C_1(\varepsilon)L_1^*(\pi_1+|\varepsilon|^2\pi_1^\perp)L_1=I_k, \tag{5.173}$$

$$C_2(\varepsilon)L_2^*(\pi_1+|\varepsilon|^{-2}\pi_1^\perp)L_2=I_{N-k}. \tag{5.174}$$

以下讨论当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\pi_\varepsilon$ 和 $\pi_\varepsilon^\perp$ 的极限的存在性. 通过坐标变换和基的变换,使

$$L_1=\begin{pmatrix}I_k\\0\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix}0\\I_{N-k}\end{pmatrix}. \tag{5.175}$$

记

$$\pi_1=\begin{pmatrix}\pi_{11}&\pi_{12}\\\pi_{21}&\pi_{22}\end{pmatrix} \tag{5.176}$$

为 $\pi_1$ 的分块阵,其中的 $\pi_{11}$, $\pi_{12}$, $\pi_{21}$, $\pi_{22}$ 分别为 $k\times k$, $k\times(N-k)$, $(N-k)\times k$, $(N-k)\times(N-k)$ 阵. 由于 $\pi_1^*=\pi_1$, 所以有

$$\pi_{11}^*=\pi_{11},\ \pi_{12}^*=\pi_{21},\ \pi_{21}^*=\pi_{12},\ \pi_{22}^*=\pi_{22}. \tag{5.177}$$

由于 $\pi_1^2=\pi_1$, 所以有

$$\pi_{11}^2+\pi_{12}\pi_{21}=\pi_{11},\quad \pi_{21}\pi_{11}+\pi_{22}\pi_{21}=\pi_{21}. \tag{5.178}$$

因为 $\pi_{11}$ 为 Hermitian 阵,所以存在 $k\times k$ 的 $U(k)$ 阵 $\beta$,使

$$\pi_{11}=\beta\,\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_k)\beta^*\quad(\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_k\neq 0), \tag{5.179}$$

因此(5.173)式化为

$$C_1(\varepsilon)\beta\Big(\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_k)$$
$$+|\varepsilon|^2\mathrm{diag}(1,\cdots,1,1-\lambda_{r+1},\cdots,1-\lambda_k)\Big)\beta^*=I_k,$$

或

$$C_1(\varepsilon)=\beta\Big[\mathrm{diag}\Big(|\varepsilon|^{-2},\cdots,|\varepsilon|^{-2},$$
$$\frac{1}{\lambda_{r+1}+|\varepsilon|^2(1-\lambda_{r+1})},\cdots,\frac{1}{\lambda_k+|\varepsilon|^2(1-\lambda_k)}\Big)\Big]\beta^*,\tag{5.180}$$

由(5.158)式,

$$\pi_\varepsilon^\perp=\begin{pmatrix}\pi_{11}+\varepsilon(1-\pi_{11})\\ \pi_{21}-\varepsilon\pi_{21}\end{pmatrix}C_1(\varepsilon)[\pi_{11}+\bar{\varepsilon}(1-\pi_{11}),\ \pi_{12}-\bar{\varepsilon}\pi_{12}].\tag{5.181}$$

由 $\pi_{11}$ 的表达式(5.179)式可见

$$\pi_{11}\beta\,\mathrm{diag}(I_r,0)\beta^*=0.\tag{5.182}$$

此外,设有 $k$ 维的向量 $l$ 满足 $\pi_{11}l=0$, 则由(5.178)式可见 $\pi_{12}\pi_{21}l=0$, 因此

$$(\pi_{21}l)^*(\pi_{21}l)=l^*\pi_{12}\pi_{21}l=l^*(\pi_{11}-\pi_{11}^2)l=0,$$

所以 $\pi_{21}l=0$. 由此得出

$$\pi_{21}\beta\,\mathrm{diag}(I_r,0,\cdots,0)=0.\tag{5.183}$$

把这些关系代入 $\pi_\varepsilon^\perp$ 的表达式(5.181)式并令 $\varepsilon\to0$,得到

$$\pi^\perp=\lim_{\varepsilon\to0}\pi_\varepsilon^\perp$$
$$=\begin{pmatrix}\pi_{11}\\ \pi_{21}\end{pmatrix}\beta\,\mathrm{diag}\Big(0,\cdots,0,\frac{1}{\lambda_{r+1}},\cdots,\frac{1}{\lambda_k}\Big)\beta^*[\pi_{11}\quad\pi_{12}]$$
$$+\begin{pmatrix}\beta\,\mathrm{diag}(I_r,0)\beta^* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\tag{5.184}$$

而 $\pi$ 的表达式是

$$\pi = \lim_{\varepsilon \to 0} \pi_\varepsilon = \begin{bmatrix} -\pi_{12} \\ 1 - \pi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\times \alpha \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}}, \cdots, \frac{1}{\lambda_{k+s}}, 0, \cdots, 0\right)\alpha^* \left[-\pi_{21} \quad 1 - \pi_{22}\right]$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \mathrm{diag}(0, I_{N-k-s})\alpha^* \end{bmatrix}. \tag{5.185}$$

这里 $\alpha$ 是适当的 $(N-K)\times(N-K)$ 酉阵,它可使 $\pi_{22}$ 对角化.

**定理 5.11** (因子分解定理)任一 $n$ 次的酉子拓广解 $\Psi(\mu)$可以有形为

$$\Psi(\mu) = (\pi_n + \mu\pi_n^\perp)(\pi_{n-1} + \mu\pi_{n-1}^\perp) \cdots (\pi_1 + \mu\pi_1^\perp)C_0 \tag{5.186}$$

的因子分解,式中 $\pi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 Hermitian 投影算子,$\pi_i^\perp$ 为其正交补,$C_0$ 为 $U(N)$中的常值元素(可略而不计).

在证明此定理之前,先证明下列两个引理.

**引理 5.3** 设 $\Psi(\mu)$为酉子拓广解,次数为 $n$,则存在 Hermite 投影 $\pi$,使得

$$\Psi_1(\mu) = (\pi + \mu\pi^\perp)\Psi(\mu)$$

为定义于 $\Omega$ 的一个稠密开子集上的酉子拓广解,其次数至多为 $n$.

**证明** 设 $\Psi(\mu)$的展开式为

$$\Psi(\mu) = T_0 + T_1\mu + \cdots + T_n\mu^n.$$

由于调和映照的方程是椭圆型的,且 $U(N)$是解析流形,可以断言 $A$, $B$ 都是 $x$, $y$ 的解析函数,从而 $T_0$ 也是 $x$, $y$ 的解析函数. 设 $T_0$ 的最大秩数为 $k$,那么使 $T_0$ 秩数为 $k$ 的点在 $\Omega$ 中构成稠密的开集 $\Omega_1$,又如 $L_1$ 为由 $k+a$ $(a \geqslant 0)$ 个列所成的常数阵,$T_0L_1$ 的最大秩数为 $k$,那么使 $T_0L_1$ 达到秩数 $k$ 的点在 $\Omega$ 中也为稠密的开集 $\Omega_2$. 取 $L = [L_1, L_2]$, 以它作 Darboux变换,由(5.157)式和(5.158)式有

$$\pi_\varepsilon^\perp = \Psi(\varepsilon)L_1C_1(\varepsilon)L_1^*\Psi(\varepsilon)^*,$$

$$C_1(\varepsilon)L_1^*\Psi_1(\varepsilon)^*\Psi_1(\varepsilon)L_1 = I_k.$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时,在 $\Omega_2$ 中成立

$$C_1(0) = (L_1^* T_0^* T_0 L_1)^{-1},$$
$$\pi^\perp = T_0 L_1 C(0) L_1^{-1} T_0^*.$$

根据 $\Psi(\mu)$所具有的性质 $\Psi(\mu)^* \Psi(\bar{\mu}^{-1}) = I$, 我们有

$$T_0^* T_n = 0,$$

从而 $\pi^\perp T_n = 0$. 因而在 $\Omega_2$ 上的酉子拓广解 $\Psi_1(\mu)$的次数不超过 $n$.

**引理 5.4** 设 $\Psi(\mu)$为酉子拓广解,次数为 $n$,则必存在定义于 $\Omega$ 的稠密开子集上的 Hermite 投影算子 $\tau$,使

$$\Psi(\mu) = (\tau + \mu\tau^\perp)\Psi_{-1}(\mu),$$

式中 $\Psi_{-1}(\mu)$ 为酉子拓广解,次数不高于 $n-1$.

**证明** 取 $\tau$ 为前一引理中的 $\pi^\perp$, $\tau^\perp$ 为 $\pi$. 令

$$\Psi_{-1}(\mu) = (\tau^\perp + \frac{1}{\mu}\tau)\Psi(\mu),$$

则

$$\Psi_1(\mu) = (\pi + \mu\pi^\perp)\Psi(\mu) = (\pi + \mu\pi^\perp)(\pi^\perp + \mu\pi)\Psi_{-1}(\mu) = \mu\Psi_{-1}(\mu).$$

所以 $\Psi_{-1}(\mu)$的次数不超过 $n-1$.

另一方面,可直接验证 $\Psi_{-1}(\mu)$为酉子拓广解的充要条件为

$$\tau^\perp A\tau - 2\tau^\perp \tau_{\bar{\zeta}} = 0,$$
$$\tau A\tau^\perp = 0.$$

令 $\tau = \pi^\perp$, $\tau^\perp = \pi$, 这就是 $\pi$ 和 $\pi^\perp$ 所满足的(5.161)式和(5.162)式. 引理证毕.

**定理 5.11 的证明** 用数学归纳法. 设定理已对 $n-1$ 次的酉子拓广解成立. 依据引理 5.4,在一个开的稠密子集中必有

$$\Psi(\mu) = (\pi_n + \mu\pi_n^\perp)\Psi_{-1}(\mu),$$

而 $\Psi_{-1}(\mu)$的次数不超过 $n$. 利用归纳法假定,可以断言

$$\Psi(\mu) = (\pi_n + \mu\pi_n^\perp)(\pi_{n-1} + \mu\pi_{n-1}^\perp) \cdots (\pi_1 + \mu\pi_1^\perp)$$

在一个稠密开集中成立. 左边是 $\Omega$ 中关于 $x$, $y$ 的解析函数,右边是关于 $x$, $y$ 在 $\Omega$ 的一个稠密开集中的解析函数. 利用解析延拓可以断言此式在

$\Omega$ 中成立. 定理证毕.

**注** 这定理已在文献[74]中得到,但文献[74]中因子分解的作法比较特殊,而这里的作法比较一般,特别是各个 $\pi_i$ 的秩数均可有一定的任意性(即 $1 \leqslant \operatorname{rank} \pi_i \leqslant N - k_i$, $k_i$ 的取法见引理 5.3). 由于奇异 Darboux 变换可以用纯代数算法作出,这里的因子分解也能由代数算法实现.

**推论** 取 $\mu = -1$, 则得到酉子 $\Psi(-1)$的分解式

$$\Psi(-1) = (\pi_n - \pi_n^{\perp})(\pi_{n-1} - \pi_{n-1}^{\perp}) \cdots (\pi_1 - \pi_1^{\perp}).$$

又到 Grassmann 流形的酉子可以作类似的分解(见文献[96]).

需要指出的是,在引理 5.4 的证明中,$\pi$ 和 $\pi^{\perp}$(或 $\sigma^{\perp}$ 和 $\sigma$)是利用 $\Psi(\mu)$ 作出的,但由 $\Psi_{-1}(\mu)$出发,却未必能用代数的算法作出它们来,在文献[40]中对此有所忽略,因此,从 1-酉子出发用纯代数的算法是否能得到全体酉子是一个需要进一步探讨的问题,文献[98]对此已有一定的进展.

# 参考文献


[ 1 ] Ablowitz M J; Kaup D J, Newell A C, Segur H. Nonlinear evolution equations of physical significance. *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 31:125

[ 2 ] Ablowitz M J, Beals R, Tenenblat K. On the solution of the generalized wave and generalized sine-Gordon equation. *Stud. in Appl. Math.*, 1986, 74:177

[ 3 ] Beals R, Coifman R R. Scattering and inverse scattering for first order systems. *Comm. Pure. Appl, Math.*, 1984, 37:39

[ 4 ] Beals R, Coifman R R. Inverse scattering and evolution equations. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 1985, 38:29

[ 5 ] Beals R, Tenenblat K. *An intrinsic generalization for the wave and sine-Gordon equation*. Differential Geometry, Pitman Monograph 52. Harlow: Longman, 1991. 25

[ 6 ] Beggs E J. Solitons in the chiral equations. *Comm. Math. Phys.*, 1990, 128: 131

[ 7 ] Bobenko A.I. *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices: Old and New integrable cases*. Harmonic maps and integrable systems. Vieweg: 1994. 83

[ 8 ] Cao C W. Nonlinearization of Lax equations of AKNS system. *Sci. in China A*, 1989, 701

[ 9 ] Chau L L, Show J C, Yen H C. A generalized Bäcklund transformation for the (super symmetric) self-dual Yang-Mills fields. *Int. J. Modern Phys.*, 1989, A4:2715

[10] Cheng Y. Constraint of integrable systems: from higher to lower dimensions. *Phys. Lett.*, 1992, A166:217

[11] Cheng Y, Li Y S. The constraint of the Kadomtsev-Petviashvili equation and its special solutions. *Phys. Lett.*, 1991, A157:22

[12] Chern S S. Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation, *Annals Polinci Math*, 1981, 39:63

[13] Darboux G. *Sur une proposition relative aux équations linéaires*. Compts Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1882, 94:1456

[14] Darboux G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Gauthier, 1915

[15] Davey A, Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves. *Proc. Roy. Soc. London*, 1974, A338:101

[16] Dong Y X, Shen Y B. Factorization and uniton numbers for harmonic maps into the unitary group U(N). *Science in China*, 1996, 39:589

[17] Eckhaus W, Van Harten A. *The inverse scattering transformation and the theory of solitons*. North-Holland, 1981

[18] Eells J, Lemaire L. *Two reports on harmonic maps*. World Scientific, 1995

[19] Eells J, Sampson J H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 1964, 86:109

[20] Eisenhart L P. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Dover, New York, 1960

[21] Ernst F J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem Ⅰ, Ⅱ. *Phys.*, *Rev.* 1968, 167:1175; 1968, 168:1415

[22] Finikoff P S. Surles suites de Laplace contenent des congruences de Wilcynski. *Comptes Reudus*, 1928, 189:517

[23] Flaschka H, McLaughlin D W. Canonically conjugate variables for the Korteweg-de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions. *Progr. Theor. Phys.*, 1976, 55:438

[24] Gu C H. On the Bäcklund transformations for the generalized hierarchies of compound MKdV-SG equation. *Lett. Math. Phys.*, 1986, 11:31

[25] Gu C H. *On the Darboux form of Bäcklund transformations*. in Integrable System, Nankai Lectures on Math. Phys.. Singapore: World Scientific, 1989. 162

[26] Gu C H. *Darboux transformations for a class of integrable systems in n variables*. Analyse, Variétés et Physique, Proc. of Colloque International en l'honneur d'Yvonne Choquet-Bruhat. Kluwer, 1992

[27] Gu C H. On the interaction of solitons for a class of integrable systems in the space-time $\mathbf{R}^{n+1}$. *Lett. Math. Phys.*, 1992, 26:199

[28] Gu C H. *On the motion of a string in a curved space-time*. Proc. of 1982 Grossmann Symposium: 139

[29] Gu C H. On the Cauchy problem for harmonic map defined on two dimensional Minkowski space. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1980, 33:727

[30] Gu C H. On the harmonic maps from $\mathbf{R}^{1,1}$ to $S^{1,1}$. *J. Reine Angw. Math.*, 1984, 346:101

[31] Gu C H. *A class of integrable systems and solitons in higher dimensional space-time* $\mathbf{R}^{n+1}$. Proc. of the Workshop on Qualitative Aspect and Applications of Nonlinear Equations, Trieste, 1993. World Scientific, 1994. 11

[32] Gu C H. *Generalized self-dual Yang-Mills flows, explicit solutions and reductions*. Proc. of KdV'95, Acta Appl. Math. 39, 1995

[33] Gu C H. Integrable evolution systems based on generalized self-dual Yang-Mills equations and their soliton-like solutions. *Lett. Math. Phys.*, 1995, 35:61

[34] Gu C H. Editor: Soliton Theory and Its Applications. Springer-Verlag and Zhejiang Science and Technology Publishing House, 1995

[35] Gu C H, Hu H S. A unified explicit form of Bäcklund transformations for generalized hierarchies of KdV equations. *Lett. Math. Phys.*, 1986, 11:325

[36] Gu C H, Hu H S. The soliton behavior of principal chiral fields. *Int. J. Mod. Phys.*, 1993, 3:501

[37] Gu C H, Hu H S. Explicit solutions to the intrinsic generalization for the wave and sine-Gordon equations. *Lett. Math. Phys.*, 1993, 29:1

[38] Gu C H, Hu H S. Explicit construction of harmonic maps from $\mathbf{R}^2$ to $U(N)$. *Chin. Ann. of Math.*, 1995, 16B:139

[39] Gu C H, Hu H S, Zhou Z X. *Darboux transformation in integrable systems*. Springer, 2005

[40] Gu C H, Hu H S. Construction of unitons via purely algebraic algorithm. *Chin. Ann. of Math.*, 1999, 20B:1

[41] Gu C H, Zhou Z X. On the Darboux matrices of Bäcklund transformations for the AKNS system. *Lett. Math. Phys.*, 1987, 13:179

[42] Gu C H, Zhou Z X. On Darboux transformations for soliton equations in high dimensional space-time. *Lett. Math. Phys.*, 1994, 32:1

[43] Guest F M. *Harmonic maps, loop groups and integrable systems*. London Math. Soc. Student Texts 38, Cambridge, 1997

[44] Hilbert D. Über Flächen von Konstanter Gausscher Krümung. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1901, 2:87

[45] Hu H S. Soliton and differential geometry. In: Gu C H, ed. *Soliton Theory and Its Applications*. Springer-Verlag and Zhejiang Science and Technology Publishing House, 1995. 291

[46] Hu H S. Sine-Laplace equation, sinh-Laplace equation and harmonic maps. *Manu. Math.*, 1982, 40:205

[47] Hu H S. Some nonexistence theorems for massive Yang-Mills fields and harmonic maps. *Lecture Notes in Physics*, 1984, 212:107

[48] Hu H S. Nonexistence theorems for Yang-Mills fields and harmonic maps in the Schwarzschild spacetime ( I ). *Lett. Math. Phys.*, 1987, 14:253; Hu H S, Wu S Y. 论文同名( II ). *Lett. Math. Phys.*, 1987, 14:343

[49] Hu H S. The construction of hyperbolic surface in 3-dimensional Minkowski space and sinh-Laplace equation. *Acta Math. Sinica*, 1985, 79

[50] Hu H S. Darboux transformations of Su-chain. *Proc. Symposium in honor of Prof. Su Buchin*. World Scientific, 1993. 108

[51] Hu H S. Darboux transformations between $\Delta\alpha = \sinh \alpha$ and $\Delta\alpha = \sin \alpha$, and the applications to pseudo-spherical congruences in $\mathbf{R}^{2,1}$. *Lett. Math. Phys.*, 1999, 48

[52] Hu H S. Laplace sequences of surfaces in projective space and two dimensional Toda equations. *Lett. Math. Phys.*, 2001, **57**:19

[53] Hu H S. Line congruence and integrable systems. *Contemporary Math*, 2002, **308**: 179

[54] Hu H S. The geometry of sine-Laplace, sinh-Laplace equations. *Proc. of the 3rd Marcel Grossmann meeting on general relativity*, 1983. 1073

[55] Huang Y Z. Bäcklund theorems in 3-dimensional Minkowski space and their higher-dimensional generalization. *Acta Mathematica Sinica (Chinese)*, 1986, 29:684

[56] Kadomtsev B, Petviashvili V I. On the stability of solitary waves in a weakly dispersing media. *Sov. Phys. Dokl.*, 1970, 15:539

[57] Konno K, Kameyama W, Sanuki H. Effect of weak dislocation potential on nonlinear wave propagation in anharmonic crystal. *J. Phys. Soc. Japan*, 1974, 37:171

[58] Konopelchenko B, Sidorenko J, Strampp W. $(1+1)$-dimensional integrable systems as symmetry constraints of $(2+1)$ dimensional systems. *Phys. Lett.*, 1991, A157:17

[59] Leble S B, Salle M A, Yurov A V. Darboux transforms for Davey-Stewartson equations and solitons in multidimensions. *Inverse Problem*, 1992, 8:207

[60] Li Y S, Gu X S. Generating solution of Boussinesq equation by Darboux transformation of three order eigenvalue differential equations. *Ann. Diff. Eqs.*, 1986, 2:419

[61] Li Y S, Gu X S, Zou M R. Three kinds of Darboux transformations for the evolution equations which connect with AKNS eigenvalue problem. *Acta. Math. Sinica, New Series*, 1987, 3:143

[62] Lin J M. Evolution of the scattering data under classical Darboux transform for $SU(2)$ soliton systems. *Acta. Math. Appl. Sinica*, 1990, 6:308

[63] Matveev V B, Salle M A. *Darboux transformations and solitons*. Springer-Verlag, 1991

[64] Melko M, Sterling I. Integrable systems, harmonic maps and the classical theory of surfaces. In: Fordy A P, Wood J C, ed. *Harmonic maps and integrable systems*. Vieweg, 1994. 102

[65] Misner C W. Harmonic maps as model for physical theories. *Phys Rev.*, 1978, D18:4510

[66] Miura R M, Korteweg-de Vries equation and generalizations, I: A remarkable explicit nonlinear transformation. *Jour. Math. Phys.*, 1968, 9:1202

[67] Novikov S, Manakov S V, Pitaevskii L P, Zakharov V E. *Theory of Solitons*. New York: Consultants Bureau, 1984

[68] Rogers C, Shadwick W R. *Bäcklund transformations and their application*. New York: Academic Press, 1982

[69] Ruh E A, Vilms J. The tension field of the Gauss map. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970, 149:569

[70] Sattinger D H. Hamiltonian hierarchies on semisimple Lie algebras. *Studies in Applied Math.*, 1985, 72:65

[71] Sattinger D H, Zurkowski V D. Gauge theory of Bäcklund transformations Ⅱ. *Physica*, 1987, 26D:225

[72] Su B Q. On certain periodic surfaces of period four in ordinary space. *Science Reports of Tôhoko Imp. Univ.* (1), 1930, 25:147

[73] Takasaki K. A new appreach to the self-dual Yang-Mills equations. *Comm. Math. Phys.*, 1984, 94:35

[74] Uhlenbeck K. Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model). *Jour. Diff. Geo.*, 1990, 38:1

[75] Valli G. On the energy spectrum of harmonic 2-spheres in unitary groups. *Topology*, 1988, 27:129

[76] Wadati M, Sanuki H, Konno K. Relationships among inverse method, Bäcklund transformations and infinite number of conservation laws. *Prog. Theor. Phys.*,

1975, 53:418

[77] Wahlquist H D, Estabrook F B. Bäcklund transformations for solitons of the Korteweg-de Vries equation. *Phys Rev. Lett.*, 1973, 31:1386

[78] Ward R S. Integrable and solvable systems, and relation among them. *Phil. Trans. R. Soc. London*, 1985, A315:451

[79] Wente H. Counterexample to a conjecture of H. Hopf. *Paciffic Jour. Math.*, 1986, 121:193

[80] Wilson G. Commuting flows and conservation laws for Lax equations. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1979, 86:131

[81] Wood J C. *Harmonic maps into symmetric spaces and integrable systems*. Harmonic maps and integrable systems. Vieweg, 1994. 29

[82] Wood J C. Explicit construction and representation of harmonic maps in the unitary group. *Proc. London Math. Soc.*, 1989, 58:608

[83] Xin Y L. *Harmonic Maps*. Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1995

[84] Yang C N. Condition of self-duality for $SU(2)$ gauge fields on Enclidean 4-dimensional space. *Phys. Rev. Lett.*, 1977, 38:377

[85] Zakharov V E, Shabat A B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. *Func. Anal. and its Appl.*, 1974, 8:226

[86] Zhou Z X. On the Darboux transformation for $1+2$ dimensional equations. *Lett. Math. Phys.*, 1988, 16:9

[87] Zhou Z X. General form of nondegenerate Darboux matrices of first order for $1+1$ dimensional unreduced Lax pairs. *Chinese Mathematics into the 21st Century*. Peking University Press; 1990. 231

[88] Zhou Z X. *Determination of nondegenerate Darboux operators of first order in $1+2$ dimensions*. Nonlinear Physics. Springer-Verlag, 1990. 23

[89] Zhou Z X. Explicit solutions of $N$-wave equation in $1+2$ dimensions. *Phys. Lett.*, 1992, A168:370

[90] Zhou Z X. A method to obtain explicit solutions of $1+2$ dimensional AKNS system. *Int. J. Mod. Phys.*, 1993, 3A:565

[91] Zhou Z X. Binary Darboux transformations for Manakov triad. *Phys. Lett.*, 1994, A195:339

[92] Zhou Z X. Binary Darboux transformation for Manakov triad (Ⅱ). *Phys. Lett.*, 1996, A211:191

[ 93 ] Zhou Z X. Soliton solutions for some equations in 1 + 2 dimensional hyperbolic su(N) AKNS system. *Inverse Problems*, 1996, 12:89

[ 94 ] Zhou Z X. Nonlinear constraints and soliton solutions of 1 + 2 dimensional three-wave equation. *Jour. Math. Phys.*, 1998, 39:986

[ 95 ] Zhou Z X. Localized solitons of hyperbolic $su(N)$ AKNS system. *Inverse Problems*, 1998, 14:1371

[ 96 ] Gu C H, Dong Y X, Shen Y B. Constructive factorizations of unitons via singular Darboux transformations. *Sci. China Ser.* A, 2000, 43:149

[ 97 ] Gu C H, Hu H S. Some remarks on singular Darboux transformations for unitons. *Chinese Ann. Math.*, 2001, B22:263

[ 98 ] He Q, Shen Y B. On harmonic maps into symplectic groups $Sp(N)$. *Chinese Ann. Math.*, 2001, B22:519

[ 99 ] Gu C H, Hu H S, Inoguchi J I. On time-like surfaces of positive constant Gaussian curvature and imaginary principal curvatures. *J. Geom. Phys.*, 2002, 41:296

[100] Inoguchi J I. Timelike surfaces of constant mean curvature in Minkowski 3-space. *Tokyo J. Math.*, 1998, 21:141

[101] McNertney L. *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz three-space*, Ph. D. thesis. Brown University, 1980

[102] Hu H S. *Two dimensional Toda equations, Laplace sequences of surfaces and harmonic sequences in projective space*, in Noether Lecture (invited lecturer). Beijing: ICM2002, 2002

[103] Rogers C, Schief W K. *Bäcklund and Darboux transformations*. Cambridge University Press, 2002

[104] Woodward L M. The Toda equations and the geometry of surfaces. In: Wójcik D, Cieśliński J, ed. *Nonlinearity and geometry*. Warszawa: Polish Scientific Publishers PWN, 1998. 60

# 索　引



## A



## B



## C



## D

## E



## F



## G



## J



## K

## L



## M



## N



## P



## S

T



U



W



X



Y



Z